N. Krauß, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Lösung 6

Aufgabe 21 Man zeige oder widerlege.

(1) In A_5 sind die Elemente $(1,2,3,4,5)$ und $(1,2,3,5,4)$ konjugiert zueinander.

(2) In A_5 sind die Elemente $(1,2,3)$ und $(1,3,2)$ konjugiert zueinander.

(3) Seien G und H endliche Gruppen. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus. Es ist $|\varphi(G)|$ ein Teiler von $\mathrm{ggT}(|G|,|H|)$.

(4) Wir betrachten die multiplikativ geschriebene Gruppe $\mathbb{R}_{>0} = (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ und die additiv geschriebene Gruppe $\mathbb{R} = (\mathbb{R},+)$.

Die Logarithmus-Abbildung $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Lösung zu Aufgabe 20:

(1) Falsch. Wir suchen zunächst alle $g \in \mathrm{S}_5$ so, dass ${}^g(1,2,3,4,5) = (1,2,3,5,4)$ ist. Bei Konjugation mit g werden die Zykeleinträge mit g abgebildet.

Beachte, es ist $(1,2,3,5,4) = (4,1,2,3,5) = (5,4,1,2,3) = (3,5,4,1,2) = (2,3,5,4,1)$. Wir erhalten daher folgende 5 mögliche bijektive Abbildungen $g_i \in \mathrm{S}_5$, um den Zykel $(1,2,3,4,5)$ in den Zykel $(1,2,3,5,4)$ durch Konjugation zu überführen.

$$\begin{array}{rrcl}
g_1 : & [1,5] & \to & [1,5] \\
& 1 & \mapsto & 1 \\
& 2 & \mapsto & 2 \\
& 3 & \mapsto & 3 \\
& 4 & \mapsto & 5 \\
& 5 & \mapsto & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcl}
g_2 : & [1,5] & \to & [1,5] \\
& 1 & \mapsto & 4 \\
& 2 & \mapsto & 1 \\
& 3 & \mapsto & 2 \\
& 4 & \mapsto & 3 \\
& 5 & \mapsto & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcl}
g_3 : & [1,5] & \to & [1,5] \\
& 1 & \mapsto & 5 \\
& 2 & \mapsto & 4 \\
& 3 & \mapsto & 1 \\
& 4 & \mapsto & 2 \\
& 5 & \mapsto & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
g_4 : & [1,5] & \to & [1,5] \\
& 1 & \mapsto & 3 \\
& 2 & \mapsto & 5 \\
& 3 & \mapsto & 4 \\
& 4 & \mapsto & 1 \\
& 5 & \mapsto & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcl}
g_5 : & [1,5] & \to & [1,5] \\
& 1 & \mapsto & 2 \\
& 2 & \mapsto & 3 \\
& 3 & \mapsto & 5 \\
& 4 & \mapsto & 4 \\
& 5 & \mapsto & 1
\end{array}$$

Es sind $g_1 = (4,5)$, $g_2 = (1,4,3,2)$, $g_3 = (1,5,3)(2,4)$, $g_4 = (1,3,4)(2,5)$ und $g_5 = (1,2,3,5)$ keine Elemente von A_5 da

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{sgn}(g_1) &=& (-1)^{2-1} = -1 \\
\operatorname{sgn}(g_2) &=& (-1)^{4-1} = -1 \\
\operatorname{sgn}(g_3) &=& (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{2-1} = -1 \\
\operatorname{sgn}(g_4) &=& (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{2-1} = -1 \\
\operatorname{sgn}(g_5) &=& (-1)^{4-1} = -1 \; .
\end{array}$$

Folglich sind die Elemente $(1,2,3,4,5)$ und $(1,2,3,5,4)$ in A_5 nicht konjugiert zueinander.

(2) Richtig. Da $\operatorname{sgn}((2,3)(4,5)) = (-1)\cdot(-1) = 1$, ist $(2,3)(4,5) \in \mathrm{A}_5$. Es ist ${}^{(2,3)(4,5)}(1,2,3) = (1,3,2)$.

(3) Richtig. Es ist $\varphi(G) \leqslant H$ eine Untergruppe, vgl. Bemerkung 108 (3). Nach dem Satz von Lagrange (Satz 97) ist $|\varphi(G)|$ ein Teiler von $|H|$.

Nach dem Homomorphisatz (Satz 118) ist $\varphi(G) \cong G/\operatorname{Kern}(\varphi)$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & H \\
G/\operatorname{Kern}(\varphi) \arrow[r, "\sim"] & \varphi(G) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Nun folgt, mit dem Satz von Lagrange, dass $|G| = |\varphi(G)| \cdot |\operatorname{Kern}(\varphi)|$ ist, und folglich ist $|\varphi(G)|$ ein Teiler von $|G|$.

Somit ist $|\varphi(G)|$ ein Teiler von $\operatorname{ggT}(|G|, |H|)$.

(4) Richtig. Für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \; ,$$

also ist ln ein Gruppenmorphismus.

Das Inverse zu ln ist gegeben durch $\ln^{-1} = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.

Nun ist für $x \in \mathbb{R}$

$$(\ln \circ \exp)(x) = \ln(\exp(x)) = x$$

und für $y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$(\exp \circ \ln)(y) = \exp(\ln(y)) = y \; .$$

Folglich ist ln ein Gruppenisomorphismus.

Es ist auch $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ein Gruppenmorphismus, da $\exp = \ln^{-1}$. In der Tat gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \; .$$

Aufgabe 22 Seien R und S Ringe. Sei $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringmorphismus.
Wir erinnern an $\operatorname{Kern}(\varphi) = \{x \in R : \varphi(x) = 0\}$ und an $\operatorname{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}}) = \{x \in \mathrm{U}(R) : \varphi^{\mathrm{U}}(x) = 1\}$.
Man zeige oder widerlege.

(1) Es ist $\varphi^{\mathrm{U}} : \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus.

(2) Falls es einen Ringmorphismus $\psi : S \to R$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_S$ gibt, dann ist $\varphi^{\mathrm{U}} : \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus.

(3) Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}}) = \{1 + x : x \in \mathrm{Kern}(\varphi)\}$.

(4) Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}}) = \{1 + x : x \in \mathrm{Kern}(\varphi)\} \cap \mathrm{U}(R)$.

Lösung zu Aufgabe 22:

(1) Falsch. Sei z.B. $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\varphi : R \to \mathbb{Z}$ der Restklassenmorphismus.

Es ist $\mathrm{U}(R) = \{-1, 1\}$ und $\mathrm{U}(S) = \{1, 2, 3, 4\}$. Nun ist

$$|\varphi^{\mathrm{U}}(\mathrm{U}(R))| = |\{1, 4\}| = 2 < 4 = |\mathrm{U}(S)|,$$

und also ist φ^U nicht surjektiv.

(2) Richtig. Wir zeigen, dass es für alle $s \in \mathrm{U}(S)$ ein Element $r \in \mathrm{U}(R)$ gibt, mit $\varphi^{\mathrm{U}}(r) = s$. Wir betrachten den Gruppenmorphismus $\psi^{\mathrm{U}} : \mathrm{U}(S) \to \mathrm{U}(R)$. Für $s \in \mathrm{U}(S)$ ist also nun $\varphi^{\mathrm{U}}(\psi^{\mathrm{U}}(s)) = \varphi(\psi(s)) = (\varphi \circ \psi)(s) = \mathrm{id}_S(s) = s$. Folglich ist $\varphi^{\mathrm{U}} : \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus.

(3) Falsch. Sei z.B. $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\varphi : R \to S$ der Restklassenmorphismus.

Dann ist $6 \in \{1 + x : x \in \mathrm{Kern}(\varphi)\}$, aber $6 \notin \mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}})$, da $6 \notin \mathrm{U}(\mathbb{Z})$.

(4) Richtig.

Zu $\supseteq$. Sei $y \in \{1 + x : x \in \mathrm{Kern}(\varphi)\} \cap \mathrm{U}(R)$. Schreibe $y = 1 + k$ mit $k \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann ist, da $y \in \mathrm{U}(R)$,

$$\varphi^{\mathrm{U}}(y) = \varphi(y) = \varphi(1 + k) = \varphi(1) + \varphi(k) = 1 + 0 = 1$$

und also $y \in \mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}})$.

Zu $\subseteq$. Sei $y \in \mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}})$. Dann ist $y \in \mathrm{U}(R)$ und

$$\varphi^{\mathrm{U}}(y) = \varphi(y) = 1 \ .$$

Also ist $0 = \varphi(y) - 1 = \varphi(y) - \varphi(1) = \varphi(y - 1)$ und daher $k := y - 1 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Es ist $y = 1 + k$. Folglich ist $y \in \{1 + x : x \in \mathrm{Kern}(\varphi)\} \cap \mathrm{U}(R)$.

Aufgabe 23 Sei $G := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbb{F}_5^\times,\ b \in \mathbb{F}_5\} \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ gegeben.
Es operiert G auf $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ via $A \cdot v := Av$, also via Multiplikation der Matrix $A \in G \subseteq \mathbb{F}_5^{2\times 2}$ mit dem Vektor $v \in \mathbb{F}_5^{2\times 1}$.

(1) Man bestimme $\mathrm{Z}(G)$ und $|G/\mathrm{Z}(G)|$.

(2) Man finde nichtleere G-Teilmengen $X_1\,,\ X_2\,,\ X_3 \subseteq \mathbb{F}_5^{2\times 1}$ mit $\mathbb{F}_5^{2\times 1} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3\,.$

(3) Sei $\varphi_i : G \to \mathrm{S}_{X_i}$ der Operationsmorphismus von G auf X_i für $i \in [1,3]$. Man bestimme $\mathrm{Kern}(\varphi_i)$ für $i \in [1,3]$. Welche dieser G-Mengen ist treu?

Lösung zu Aufgabe 23:

(1) Wir behaupten $\mathrm{Z}(G) \overset{!}{=} \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{F}_5^\times\}$.

Zu $\subseteq$. Es ist $x \in \mathrm{Z}(G)$ genau dann, wenn $x \cdot y = y \cdot x$ für $y \in G$.

Es ist für $a, d \in \mathbb{F}_5^\times$, $b \in \mathbb{F}_5$

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$$

genau dann, wenn

$$\left(\begin{smallmatrix} a & a+b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b+d \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$$

d.h. wenn $a = d$.

Es ist

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$$

genau dann, wenn

$$\left(\begin{smallmatrix} 2a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2a & 2b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$$

d.h. wenn $b = 0$.

Zu $\supseteq$. Es ist für $a', d' \in \mathbb{F}_5^\times$, $b' \in \mathbb{F}_5$

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \ .$$

Also $\mathrm{Z}(G) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{F}_5^\times\}$.

Es ist $|\mathrm{Z}(G)| = 4$ und $|G| = 4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$. Nun ist $|G/\mathrm{Z}(G)| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Z}(G)|} = \frac{80}{4} = 20$.

(2) Es sind $X_1 := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_5^\times\}$, $X_2 := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_5,\ y \in \mathbb{F}_5^\times\}$ und $X_3 := \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ disjunkte G-Teilmengen mit $\mathbb{F}_5^{2\times 1} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$. Denn für $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in X_1$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ ist

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ax \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in X_1 \ ,$$

da $a \cdot x \neq 0$ für $a, x \in \mathbb{F}_5^\times$.

Für $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X_2$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ ist

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ax+by \\ dy \end{smallmatrix}\right) \in X_2 \ ,$$

da $d \cdot y \neq 0$ für $d, y \in \mathbb{F}_5^\times$.

Für $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in X_3$ und $A \in G$ ist $A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in X_3$.

(3) Es ist für $i \in [1,3]$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : G & \to & \mathrm{S}_{X_i} \\ A & \mapsto & (\varphi_i(A) :\ X_i \to X_i :\ v \mapsto Av) \ . \end{array}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(\varphi_1) &= \{A \in G : Av = v \text{ für } v \in X_1\} = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G : \left(\begin{smallmatrix} ax \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ für } x \in \mathbb{F}_5^\times\} \\ &= \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbb{F}_5,\ d \in \mathbb{F}_5^\times\}\ .\end{aligned}$$

Also ist φ_1 nicht injektiv.

Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(\varphi_2) &= \{A \in G : Av = v \text{ für } v \in X_2\} \\ &= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G : \left(\begin{smallmatrix} ax+by \\ dy \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \text{ für } x \in \mathbb{F}_5 \text{ und } y \in \mathbb{F}_5^\times\}\ .\end{aligned}$$

Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ ist $\left(\begin{smallmatrix} ax+by \\ dy \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ für $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X_2$ genau dann, wenn $d = 1$ ist und $ax + by = x$ ist. Da $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in X_2$ ist, muss auch $a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$ gelten, d.h. $b = 0$. Da $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in X_2$ ist, muss auch $a \cdot 1 = 1$ gelten, d.h. $a = 1$. Nun ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(\varphi_2) &= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G : \left(\begin{smallmatrix} ax+by \\ dy \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \text{ für } x \in \mathbb{F}_5 \text{ und } y \in \mathbb{F}_5^\times\} \\ &= \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G\}\ .\end{aligned}$$

Also ist φ_2 injektiv.

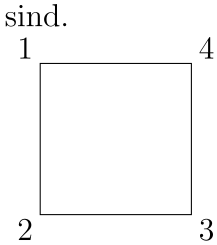
Es ist

$$\mathrm{Kern}(\varphi_3) = \{A \in G : Av = v \text{ für } v \in X_3\} = G\ .$$

Also ist φ_3 nicht injektiv.

Die G-Menge X_2 ist treu, da φ_2 injektiv ist.

Die G-Mengen X_1, X_3 sind nicht treu, da φ_1 und φ_3 nicht injektiv sind.



Aufgabe 24 Sei $\mathrm{D}_8 := \langle (1,2,3,4),\ (2,4) \rangle \leqslant \mathrm{S}_4$.
Es operiert $f \in \mathrm{D}_8$ auf $\{1,2,3,4\}$ via $f \cdot x = f(x)$ für $x \in \{1,2,3,4\}$.

(1) Man bestimme $|\mathrm{D}_8|$ und liste alle Elemente von D_8 auf.

(2) Wir interpretieren diese Operation als Operation auf einem Quadrat mit Ecken $1,2,3,4$. Liefert D_8 die Spiegelung des Quadrats an der Diagonalen durch die Ecken 2 und 4? Liefert D_8 die Spiegelung des Quadrats an der Mittelsenkrechten der Kante zwischen Ecke 2 und Ecke 3? Liefert D_8 die Drehung des Quadrats um den Winkel $-\pi/2$?

Lösung zu Aufgabe 24:

(1) Jedes Element von D_8 lässt sich als Produkt von $(1,2,3,4)$ und $(2,4)$ darstellen.

Um alle Elemente in D_8 aufzulisten, erstellen wir folgenden Baum. Für $x \in \mathrm{D}_8$ und $y \in \{(1,2,3,4),(2,4)\}$ bedeutet $x \xrightarrow{\circ y}$, dass am Pfeilende $x \circ y$ steht. Wir beginnen mit dem Element id und können aufhören, sobald keine neuen Elemente mehr hinzukommen. Wir markieren alle neuen Elemente durch einen Kasten um das Element.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{(1,2,3,4)} \arrow[dl, "\circ(1,2,3,4)"'] \arrow[d, "\circ(2,4)"] & \boxed{\mathrm{id}} \arrow[l, "\circ(1,2,3,4)"'] \arrow[r, "\circ(2,4)"] & \boxed{(2,4)} \arrow[r, "\circ(2,4)"] \arrow[d, "\circ(1,2,3,4)"] & \mathrm{id} \\
 & \boxed{(1,3)(2,4)} \arrow[dl, "\circ(1,2,3,4)"'] \arrow[d, "\circ(2,4)"] & \boxed{(1,2)(3,4)} \arrow[r, "\circ(2,4)"] \arrow[d, "\circ(1,2,3,4)"] & (1,2,3,4) & \boxed{(1,4)(2,3)} \arrow[r, "\circ(2,4)"] \arrow[d, "\circ(1,2,3,4)"] & (1,4,3,2) \\
\boxed{(1,4,3,2)} \arrow[d, "\circ(1,2,3,4)"'] \arrow[dr, "\circ(2,4)"] & (1,3) & (2,4) & & \boxed{(1,3)} \arrow[r, "\circ(2,4)"] \arrow[d, "\circ(1,2,3,4)"] & (1,3)(2,4) \\
\mathrm{id} & (1,4)(2,3) & & & (1,2)(3,4) &
\end{tikzcd}
$$

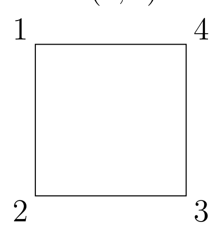
Wir stellen fest, dass

$$\mathrm{D}_8 = \{\mathrm{id}, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (1,4,3,2), (1,3), (2,4)\}$$

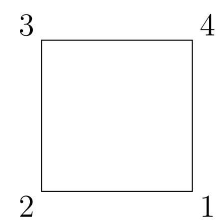
ist, und die Ordnung $|\mathrm{D}_8| = 8$ beträgt.

(2) *Spiegelung an der Diagonalen durch die Ecken* 2 *und* 4*:*

Es ist $(1,3) \in \mathrm{D}_8$ und es ist $(1,3)\cdot 1 = 3$ und $(1,3)\cdot 3 = 1$. Somit bewirkt die Operation von $(1,3)$ die Überführung des Quadrats



in das Quadrat

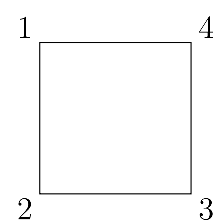


.

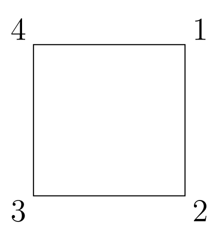
Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Kante zwischen Ecke 2 *und Ecke* 3*:*

Es ist $(1,4)(2,3) \in D_8$ und es ist $(1,4)(2,3)\cdot 1 = 4$, $(1,4)(2,3)\cdot 2 = 3$, $(1,4)(2,3)\cdot 3 = 2$ und $(1,4)(2,3)\cdot 4 = 1$.

Somit bewirkt die Operation von $(1,4)(2,3)$ die Überführung des Quadrats



in das Quadrat

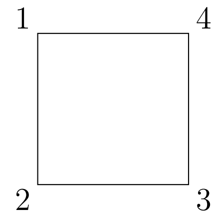


.

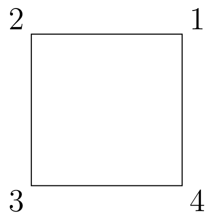
Drehung des Quadrats um den Winkel $-\pi/2$ *:*

Es ist $(1,2,3,4) \in D_8$ und es ist $(1,2,3,4)\cdot 1 = 2$, $(1,2,3,4)\cdot 2 = 3$, $(1,2,3,4)\cdot 3 = 4$ und $(1,2,3,4)\cdot 4 = 1$.

Somit bewirkt die Operation von $(1, 2, 3, 4)$ die Überführung des Quadrats



in das Quadrat



.

Man kann diese Wirkung noch formalisieren durch einen Gruppenmorphismus $\mathrm{D}_8 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, wobei die einem Gruppenelement zugehörige Matrix dann auf das Quadrat angewandt wird.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/alg21/`