N. Krauß, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Lösung 3

Aufgabe 9

(1) Ist $(4) \cap (6)$ in $\mathbb{Z}$ ein Hauptideal? Man bestimme gegebenenfalls einen Erzeuger.

(2) Sei $I := (22, 10) \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Ist $4 \in I$?

(3) Ist $(X) \cap (Y)$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ ein Hauptideal? Man bestimme gegebenenfalls einen Erzeuger.

(4) Sei $J := (Y^2 - X, Y - X^2) \trianglelefteq \mathbb{Q}[X, Y]$. Ist $XY^2 - Y \in J$?

Lösung zu Aufgabe 9:

(1) Nach Beispiel 52.(1) ist $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealbereich. Also ist das Ideal $(4)\cap(6)$ ein Hauptideal. Es ist $(4) \cap (6) = (12)$, da eine ganze Zahl genau dann durch 4 und durch 6 teilbar ist, wenn sie durch 12 teilbar ist.

(2) Es ist, da I ein Ideal ist, auch $2 \cdot 22 + (-4) \cdot 10 = 4 \in I$.

(3) Es ist $(X) = \{u(X,Y)\cdot X : u(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]\}$ die Menge aller Polynome in $\mathbb{Q}[X,Y]$, die durch X teilbar sind. Diese haben Koeffizient 0 bei allen Monomen der Form X^0Y^j, wobei $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Ebenso ist $(Y) = \{v(X,Y) \cdot Y : v(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]\}$ die Menge aller Polynome in $\mathbb{Q}[X,Y]$, die durch Y teilbar sind. Diese haben Koeffizient 0 bei allen Monomen der Form X^iY^0, wobei $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Wir *behaupten,* es ist $(X) \cap (Y) \overset{!}{=} (X \cdot Y)$. Zu zeigen ist nur $(X) \cap (Y) \overset{!}{\subseteq} (X \cdot Y)$. Liegt ein Polynom $w(X,Y)$ in $(X) \cap (Y)$, so hat es Koeffizient 0 bei allen Monomen der Form X^0Y^j, wobei $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, und der Form X^iY^0, wobei $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Alle Monome, die in $w(X,Y)$ mit Koeffizient $\neq 0$ auftauchen, sind mithin durch $X \cdot Y$ teilbar. Somit ist $w(X,Y)$ durch $X \cdot Y$ teilbar. Mit anderen Worten, es ist $w(X,Y) \in (X \cdot Y)$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Somit ist $(X) \cap (Y)$ ein Hauptideal mit Erzeuger $X \cdot Y$.

(4) Es ist, da J ein Ideal ist, auch

$$J \ni X \cdot (Y^2 - X) + (-1)(Y - X^2) = X \cdot Y^2 - X^2 - Y + X^2 = XY^2 - Y \ .$$

Aufgabe 10

(1) Man bestimme ein $a \in \mathbb{Z}$ und einen Ringisomorphismus

$$\varphi \ : \ \mathbb{Z}/(a) \ \xrightarrow{\sim} \ \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(7) \ .$$

Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für φ^{-1}.

(2) Man bestimme ein $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ und einen Ringisomorphismus

$$\psi \ : \ \mathbb{F}_2[X]/(f(X)) \ \xrightarrow{\sim} \ \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1) \times \mathbb{F}_2[X]/(X^2) \ .$$

Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für ψ^{-1}.

Lösung zu Aufgabe 10:

(1) Es ist $(4)+(3)=\mathbb{Z}$, $(4)+(7)=\mathbb{Z}$, und $(3)+(7)=\mathbb{Z}$. Sei $(a) := (4)\cap(3)\cap(7) = (84)$. Dann gibt es nach dem Chinesischen Restsatz den Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ \mathbb{Z}/(84) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/(4)\times\mathbb{Z}/(3)\times\mathbb{Z}/(7) \\ x+(84) & \mapsto & (x+(4), x+(3), x+(7)) \end{array} .$$

Um eine Abbildungsvorschrift für φ^{-1} zu finden, benötigen wir ein Urbild unter φ von $(x+(4), y+(3), z+(7)) \in \mathbb{Z}/(4)\times\mathbb{Z}/(3)\times\mathbb{Z}/(7)$. Da φ surjektiv ist, gibt es dieses Urbild, und da φ injektiv ist, ist es eindeutig.

Wir bestimmen zunächst Urbilder von $(1+(4), 0+(3), 0+(7))$, $(0+(4), 1+(3), 0+(7))$ und $(0+(4), 0+(3), 1+(7))$.

Es ist

$$\varphi(a+(84)) = (a+(4), a+(3), a+(7)) \overset{!}{=} (1+(4), 0+(3), 0+(7)),$$

falls a durch 3 sowie durch 7 teilbar ist, und beim Teilen durch 4 Rest 1 bleibt. Wir können $a=21$ nehmen.

Es ist

$$\varphi(b+(84)) = (b+(4), b+(3), b+(7)) \overset{!}{=} (0+(4), 1+(3), 0+(7)),$$

falls b durch 4 sowie durch 7 teilbar ist, und beim Teilen durch 3 Rest 1 bleibt. Wir können $b=28$ nehmen.

Es ist

$$\varphi(c+(84)) = (c+(4), c+(3), c+(7)) \overset{!}{=} (0+(4), 0+(3), 1+(7)),$$

falls c durch 3 sowie durch 4 teilbar ist, und beim Teilen durch 7 Rest 1 bleibt. Wir können $c=36$ nehmen.

Nun ist

$$\begin{array}{rl} & \varphi(21\cdot x+28\cdot y+36\cdot z+(84)) \\ = & (21\cdot x+28\cdot y+36\cdot z+(4),\ 21\cdot x+28\cdot y+36\cdot z+(3),\ 21\cdot x+28\cdot y+36\cdot z+(7)) \\ = & (x+(4), y+(3), z+(7)) \ . \end{array}$$

Also ist

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} \ : \ \mathbb{Z}/(4)\times\mathbb{Z}/(3)\times\mathbb{Z}/(7) & \to & \mathbb{Z}/(84) \\ (x+(4), y+(3), z+(7)) & \mapsto & 21\cdot x+28\cdot y+36\cdot z+(84) \ . \end{array}$$

(2) Sei $I := \big(X^2+X+1\big)+\big(X^2\big)$.

Da I ein Ideal ist und $X^2+X+1,\ X^2 \in I$ ist, ergibt sich

$$(X+1)\cdot(X^2+X+1)+X\cdot X^2 = X^3+1+X^3 = 1 \in I \ .$$

Also ist $I = \mathbb{F}_2[X]$.

Sei $(f(X)) := \big(X^2+X+1\big)\cap\big(X^2\big) = \big(X^4+X^3+X^2\big)$. Dann gibt es nach dem Chinesischen Restsatz den Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \psi \ : \ \mathbb{F}_2[X]/\big(X^4+X^3+X^2\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_2[X]/\big(X^2+X+1\big)\times\mathbb{F}_2[X]/\big(X^2\big) \\ v(X)+\big(X^4+X^3+X^2\big) & \mapsto & \big(v(X)+\big(X^2+X+1\big), v(X)+\big(X^2\big)\big) \ . \end{array}$$

Um eine Abbildungsvorschrift für ψ^{-1} zu finden, benötigen wir ein Urbild unter ψ von $(v(X)+\big(X^2+X+1\big), w(X)+\big(X^2\big)) \in \mathbb{F}_2[X]/\big(X^2+X+1\big)\times\mathbb{F}_2[X]/\big(X^2\big)$. Da ψ surjektiv ist, gibt es dieses Urbild, und da ψ injektiv ist, ist es eindeutig.

Wir bestimmen zunächst Urbilder von

$$(1+\big(X^2+X+1\big), 0+\big(X^2\big)) \text{ und } (0+\big(X^2+X+1\big), 1+\big(X^2\big)).$$

Es ist

$$\psi(u(X)+\big(X^4+X^3+X^2\big)) = (u(X)+\big(X^2+X+1\big), u(X)+\big(X^2\big)) \overset{!}{=} (1+\big(X^2+X+1\big), 0+\big(X^2\big))$$

falls $u(X)$ durch X^2 teilbar ist, und beim Teilen durch X^2+X+1 Rest 1 bleibt. Wegen $X^3 = (X+1)\cdot(X^2+X+1)+1$ und $X^3 = X\cdot X^2$, können wir $u(X) = X^3$ nehmen.

Es ist

$$\psi(s(X)+\big(X^4+X^3+X^2\big)) = (0+\big(X^2+X+1\big), s(X)+\big(X^2\big)) \overset{!}{=} (0+\big(X^2+X+1\big), 1+\big(X^2\big))$$

falls $s(X)$ durch X^2+X+1 teilbar ist, und beim Teilen durch X^2 Rest 1 bleibt. Wegen $X^3+1 = X\cdot X^2+1$ und $X^3+1 = (X+1)\cdot(X^2+X+1)$, können wir $s(X) = X^3+1$ nehmen.

Nun ist

$$\begin{array}{rl}
& \psi(v(X)\cdot X^3 + w(X)\cdot(X^3+1) + \big(X^4+X^3+X^2\big)) \\
= & (v(X)\cdot X^3 + \underbrace{w(X)\cdot(X^3+1)}_{\in\left(X^2+X+1\right)} + \big(X^2+X+1\big), \underbrace{v(X)\cdot(X^3)}_{\in\left(X^2\right)} + w(X)\cdot(X^3+1) + \big(X^2\big)) \\
= & (v(X)\cdot X^3 + \big(X^2+X+1\big), w(X)\cdot(X^3+1) + \big(X^2\big)) \\
= & (v(X)\cdot X^3 + \underbrace{v(X)\cdot(X^3+1)}_{\in\left(X^2+X+1\right)} + \big(X^2+X+1\big), w(X)\cdot(X^3+1) + \underbrace{w(X)\cdot X^3}_{\in\left(X^2\right)} + \big(X^2\big)) \\
= & (v(X) + \big(X^2+X+1\big), w(X) + \big(X^2\big)) \,.
\end{array}$$

Also ist

$$\begin{array}{rrcl}
\psi^{-1} : & \mathbb{F}_2[X]/\big(X^2+X+1\big)\times\mathbb{F}_2[X]/\big(X^2\big) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathbb{F}_2[X]/\big(X^4+X^3+X^2\big) \\
& (v(X)+\big(X^2+X+1\big), w(X)+\big(X^2\big)) & \mapsto & v(X)\cdot X^3 + w(X)\cdot(X^3+1) + \big(X^4+X^3+X^2\big) \,.
\end{array}$$

Aufgabe 11 Man zeige oder widerlege.

(1) Sei R ein kommutativer Ring. Sei $I \trianglelefteq R$. Ist R noethersch, dann ist auch R/I noethersch.

(2) Sei R ein Hauptidealbereich. Dann ist auch $R[X]$ ein Hauptidealbereich.

(3) Die Abbildung $\mathrm{v}_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ ist surjektiv.

(4) Die Abbildung $\mathrm{v}_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ ist injektiv.

Lösung zu Aufgabe 11:

(1) Der Restklassenmorphismus $\rho = \rho_{R,I} : R \to R/I$ ist surjektiv. Sei $N \trianglelefteq R/I$.
Sei $U := \{u \in R : \rho(u) \in N\} \subseteq R$, das Urbild von N unter ρ.

Es ist U ein Ideal in R, denn $0 \in U$, und für $r, r' \in R$, $u, u' \in U$ ist wegen

$$\rho(ru + r'u') = \underbrace{\rho(r)}_{\in R/I}\underbrace{\rho(u)}_{\in N} + \underbrace{\rho(r')}_{\in R/I}\underbrace{\rho(u')}_{\in N} \in N \trianglelefteqslant R/I$$

auch $ru + r'u' \in U$. Da R noethersch ist, ist $U \trianglelefteqslant R$ endlich erzeugt.

Sei $(u_1, \ldots, u_k)$ für $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ein Erzeugendensystem von U.

Für $n \in N$ gibt es $u \in U$ mit $\rho(u) = n$. Nun gibt es $a_i \in R$ mit

$$u = a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k \ .$$

Es folgt

$$n = \rho(u) = \rho(a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k) = \rho(a_1) \cdot \rho(u_1) + \cdots + \rho(a_k) \cdot \rho(u_k).$$

Da $\rho(a_i) \in R/I$, lässt sich n als R/I-Linearkombination der $\rho(u_i)$ für $i \in [1, k]$ schreiben. Also ist $(\rho(u_1), \ldots, \rho(u_k))$ ein Erzeugendensystem von N, welches endlich ist. Folglich ist R/I noethersch.

(2) Falsch. Es ist nach Beispiel 52 zwar $\mathbb{Q}[X]$ ein Hauptidealbereich. Es ist $\mathbb{Q}[X, Y] = (\mathbb{Q}[X])[Y]$ aber kein Hauptidealbereich, da z.B. (X, Y) kein Hauptideal ist.

(3) Richtig. Es ist $\mathrm{v}_3(0) = +\infty$ und z.B. $\mathrm{v}_3(3^k) = k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Falsch. Es ist z.B. $\mathrm{v}_3(3) = 1 = \mathrm{v}_3(6)$, aber $3 \neq 6$.

Aufgabe 12

(1) Man bestimme $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $r \in [0, 10]$ und mit $273 = q \cdot 11 + r$.

(2) Man bestimme $q(X), r(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ mit $\deg(r(X)) < 2$ und mit $X^4 + X^3 - X + 1 = q(X) \cdot (X^2 - 1) + r(X)$.

(3) Man bestimme $q, r \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit $|r|^2 < 5$ und mit $7 = q \cdot (2 - \mathrm{i}) + r$.

Lösung zu Aufgabe 12:

(1) Für $q = 24$ und $r = 9$ ergibt sich $273 = 24 \cdot 11 + 9$.

(2) Polynomdivison liefert $q(X) = X^2 + X + 1$ und $r = 2$.

(3) In $\mathbb{C}$ ergibt sich

$$\frac{7}{2 - \mathrm{i}} = \frac{7 \cdot (2 + \mathrm{i})}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})} = \frac{14 + 7\mathrm{i}}{5} \ .$$

Runden ergibt für den Realteil $\frac{14}{5} \approx 3$ und für den Imaginärteil $\frac{7}{5} \approx 1$. Für $q = 3 + \mathrm{i}$ ist nun

$$7 = (3 + \mathrm{i}) \cdot (2 - \mathrm{i}) + r = 7 - \mathrm{i} + r.$$

Somit ist $r = \mathrm{i}$.

Anmerkung: Hier sind q und r nicht eindeutig. Z.B. ist auch $7 = \underbrace{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}_{=5} + 2$.