N. Krauß, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Lösung 1

Aufgabe 1 Man zeige oder widerlege.

Sei R ein Ring. Wir schreiben $1 := 1_R$.

(1) Für $x \in R$ ist $0 \cdot x = 0$.

(2) Für $x \in R$ ist $(-1) \cdot x = -x$.

(3) Es enthält $\{\, x \in R \,:\, x^2 = 1 \,\}$ mindestens zwei Elemente.

(4) Es enthält $\{\, x \in R \,:\, x^2 = 1 \,\}$ höchstens zwei Elemente.

Lösung zu Aufgabe 1:

(1) Richtig. Es ist

$$0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \ .$$

Daraus folgt, dass

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x - 0 \cdot x = 0 \cdot x - 0 \cdot x = 0.$$

(2) Richtig. Beweis:

$$(-1) \cdot x = (-1) \cdot x + x - x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x - x = (-1+1) \cdot x - x = 0 \cdot x - x \overset{(1)}{=} -x \ .$$

(3) Falsch. Für $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ ist $\{\, x \in R \,:\, x^2 = 1 \,\} = \{1\}$.

(4) Falsch. Für $R = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist $\{\, x \in R \,:\, x^2 = 1 \,\} = \{(-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1)\}$.

Oder, alternativ: $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ und $\{\, x \in R \,:\, x^2 = 1 \,\} = \{-5, -1, 1, 5\}$.

Aufgabe 2 Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Man zeige die Eigenschaft (Ring 7) für den Polynomring $R[X]$.

(2) Für $f(X),\ g(X) \in R[X]$ zeige man $\deg(f(X) + g(X)) \leqslant \max\{\deg(f(X)), \deg(g(X))\}$.

(3) Sei R ein Integritätsbereich.

Für $f(X),\ g(X) \in R[X]$ zeige man $\deg(f(X) \cdot g(X)) = \deg(f(X)) + \deg(g(X))$.

An welcher Stelle braucht man, daß R ein Integritätsbereich ist?

Lösung zu Aufgabe 2:

(1) Seien $r(X), \tilde{r}(X), s(X), \tilde{s}(X) \in R[X]$. Wir schreiben $r(X) = \sum_{i\geqslant 0} r_i X^i$, $\tilde{r}(X) = \sum_{i\geqslant 0} \tilde{r}_i X^i$, $s(X) = \sum_{j\geqslant 0} s_j X^j$, $\tilde{s}(X) = \sum_{j\geqslant 0} \tilde{s}_j X^j$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
(r(X) + \tilde{r}(X)) \cdot s(X) &= (\textstyle\sum_{i\geqslant 0}(r_i + \tilde{r}_i)X^i) \cdot (\sum_{j\geqslant 0} s_j X^j) \\
&= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} (\underbrace{(r_i + \tilde{r}_i) \cdot s_{k-i}}_{\in R} X^k) \\
&= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} (r_i s_{k-i} + \tilde{r}_i s_{k-i}) X^k \\
&= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} r_i s_{k-i} X^k + \sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} \tilde{r}_i s_{k-i} X^k \\
&= r(X) \cdot s(X) + \tilde{r}(X) \cdot s(X)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
r(X) \cdot (s(X) + \tilde{s}(X)) &= (\textstyle\sum_{i\geqslant 0} r_i X^i) \cdot (\sum_{j\geqslant 0}(s_j + \tilde{s}_j)X^j) \\
&= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} (\underbrace{r_i \cdot (s_{k-i} + \tilde{s}_{k-i})}_{\in R} X^k) \\
&= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} (r_i s_{k-i} + r_i \tilde{s}_{k-i}) X^k \\
&= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} r_i s_{k-i} X^k + \sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\geqslant 0} r_i \tilde{s}_{k-i} X^k \\
&= r(X) \cdot s(X) + r(X) \cdot \tilde{s}(X)\ .
\end{aligned}$$

(2) Falls $f(X) = 0$, dann gilt $\deg(f(X) + g(X)) = \max\{\deg(f(X)), \deg(g(X))\}$, da dann $f(X) + g(X) = f(X)$ und $\deg(0) = -\infty$ ist.

Analog falls $g(X) = 0$.

Seien also $f(X)$ und $g(X)$ von 0 verschieden.

Wir schreiben $f(X) = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ und $\deg(f(X)) =: m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, sowie $g(X) = \sum_{j\geqslant 0} b_j X^j$ und $\deg(g(X)) =: n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Es ist $a_i = 0$ für $i > m$ und $b_j = 0$ für $j > n$. Somit ist für $k > \max\{m, n\}$ auch $a_k + b_k = 0$. Also ist $\deg(f(X) + g(X)) = \deg(\sum_{k\geqslant 0}(a_k + b_k)X^k) \leqslant \max\{\deg(f(X)), \deg(g(X))\}$.

(3) Falls $f(X) = 0$ oder $g(X) = 0$, dann gilt

$$\deg(f(X) \cdot g(X)) = \deg(0) = -\infty = \deg(f(X)) + \deg(g(X))$$

Seien also $f(X)$ und $g(X)$ von 0 verschieden.

Wir schreiben $f(X) = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ und $\deg(f(X)) = m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, sowie $g(X) = \sum_{j\geqslant 0} b_j X^j$ und $\deg(g(X)) = n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Es ist $a_i = 0$ für $i > m$ und $b_j = 0$ für $j > n$. Es ist $f(X) \cdot g(X) = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{i\in[0,k]} a_i b_{k-i} X^k$, wobei $a_i b_{k-i} = 0$ für $k > m + n$ und $i \in [0, k]$, da nicht $i \leqslant m$ und $k - i \leqslant n$ sein kann. Da R ein Integritätsbereich ist, ist der Leitkoeffizient $a_m b_n \neq 0$. Also ist $\deg(f(X) \cdot g(X)) = \deg(f(X)) + \deg(g(X))$.

Aufgabe 3 Sei $R := \mathbb{Q}^{2\times 2} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right)$.
Sei $S := \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a,\, b,\, d \in \mathbb{Q} \} \subseteq \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) = R$.

(1) Man zeige: Es ist S ein Teilring von R.

(2) Ist S kommutativ?

(3) Ist $\mathrm{U}(S) = \mathrm{U}(R) \cap S$?

(4) Gibt es einen Ring $\tilde{R}$ und einen Teilring $\tilde{S} \subseteq \tilde{R}$ mit $\mathrm{U}(\tilde{S}) \neq \mathrm{U}(\tilde{R}) \cap \tilde{S}$?

Lösung zu Aufgabe 3:

(1) Es ist $1_R = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in S$.

Seien $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right) \in S$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} a-\tilde{a} & b-\tilde{b} \\ 0 & d-\tilde{d} \end{smallmatrix}\right) \in S \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} a\tilde{a} & a\tilde{b}+b\tilde{d} \\ 0 & d\tilde{d} \end{smallmatrix}\right) \in S\,. \end{aligned}$$

Somit ist S ein Teilring von R.

(2) Nein. Es sind $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in S$, aber

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

und

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\,.$$

(3) Richtig. Es ist $\mathrm{U}(S) = \{s \in S : \det(s) \neq 0\}$, da die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. Also wird

$$\mathrm{U}(S) \;=\; \{s \in S : \det(s) \neq 0\} \;=\; \{r \in R : \det(r) \neq 0\} \cap S \;=\; \mathrm{U}(R) \cap S\,.$$

(4) Zum Beispiel: $\tilde{R} = \mathbb{Q}$ und $\tilde{S} = \mathbb{Z}$. Es ist $\mathrm{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\} \neq \mathbb{Z}^\times = \mathbb{Q}^\times \cap \mathbb{Z} = \mathrm{U}(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

(1) Man finde ein Element in $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(3)}) \smallsetminus \mathrm{U}(\mathbb{Z})$.

(2) Man finde ein Element in $\mathrm{U}(\mathbb{Q}) \smallsetminus \mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(3)})$.

(3) Für $x \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ sei $S_x := \{\, y \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \;:\; xy = yx \,\} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$.

Man zeige: Es ist S_x ein Teilring von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.

Gibt es ein $x \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $S_x \subset \mathbb{Q}^{2\times 2}$?

Lösung zu Aufgabe 4:

(1) Es ist $\mathbb{Z}_{(3)} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ teilt nicht } b\}$. Z.B. sind $2, \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_{(3)}$, da 3 weder 1 noch 2 teilt. Somit ist $2 \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(3)})$ aber $2 \notin \mathrm{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$.

(2) Es ist $3 \in \mathrm{U}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\times$, aber wegen $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}_{(3)}$ ist $3 \notin \mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(3)})$.

(3) Es ist $1_{\mathbb{Q}^{2\times 2}} \in S_x$. Seien $y, \tilde{y} \in S_x$. Dann ist

$$x(y - \tilde{y}) = xy - x\tilde{y} = yx - \tilde{y}x = (y - \tilde{y})x$$

und

$$xy\tilde{y} = yx\tilde{y} = y\tilde{y}x \ .$$

Also sind $y - \tilde{y}$ und $y\tilde{y}$ in S_x. Somit ist S_x ein Teilring.
Sei schließlich z.B. $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist z.B. $y := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \smallsetminus S_x$:

$$xy = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) ,$$

und

$$yx = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \ .$$

Also ist $S_x \subset \mathbb{Q}^{2\times 2}$.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/alg21/`