Klausur zur Algebra für Lehramt

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- **Antworten sind zu begründen.** Nachvollziehbare Rechnungen zählen als Begründungen.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2021** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2021** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Man bestimme ein $a \in \mathbb{Z}$ und einen Ringisomorphismus

$$\varphi \;:\; \mathbb{Z}/(a) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(8)\;.$$

Man bestimme die Abbildungsvorschrift für φ^{-1}.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/(X^2+1)$. Sei $\iota := X + (X^2+1)$. Dann ist $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\iota)$ und $\iota^2 = -1$.

Man bestimme ein Element $y \in \mathbb{F}_9$ mit $\mathrm{U}(\mathbb{F}_9) = \langle y \rangle$.

Für dieses Element y bestimme man das Minimalpolynom $\mu_{y,\mathbb{F}_3}(X)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(1) Bestimmen Sie $\varphi(60)$.

Besitzt $\mathbb{Q}(\zeta_{60})$ einen Teilkörper Z mit $[Z : \mathbb{Q}] = 3$?

(2) Bestimmen Sie das Kreisteilungspolynom $\Phi_9(X)$.

Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}(\zeta_3)]$ und das Minimalpolynom $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Man zeige: Es ist nicht möglich, ausgehend von einer Strecke der Länge 1 mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\sqrt[5]{6}$ zu konstruieren.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Man zeige oder widerlege.

(1) Es gibt keine einfache Gruppe von Ordnung 21.

(2) Sei G eine Gruppe. Die Abbildung $\varphi : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

(3) Es gibt abelsche Gruppen G_1, G_2, G_3 der Ordnung 4, die paarweise nichtisomorph sind.

(4) Sei R ein Integritätsbereich. Sei $I \lhd R$ ein Ideal. Dann ist R/I ein Integritätsbereich.

(5) Es ist das Polynom $X^7 + 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.

Bitte wenden →

Aufgabe 6 (4 Punkte) Sei G eine endliche nichtabelsche Gruppe der Ordnung 55.

(1) Man bestimme $|\operatorname{Syl}_5(G)|$ und $|\operatorname{Syl}_{11}(G)|$.

(2) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 5 in G.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(1) Sei $f := (1,2,4,3) \in \mathrm{S}_5$ und $g := (1,4,3)(2,5) \in \mathrm{S}_5$. Man bestimme $f \circ g$.

(2) Man bestimme ein Element $h \in \mathrm{S}_4$ mit ${}^{h}(1,2,3,4) = (1,3,4,2)$.

(3) Ist die alternierende Gruppe A_4 abelsch?

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Man bestimme $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{v}_3(x) = 2$ und $\mathrm{v}_3(y) = 2$ so, dass x und y in $\mathbb{Z}$ nicht assoziiert sind.

Aufgabe 9 (3 Punkte) Sei $G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : c \in \mathbb{F}_3\,,\ a, d \in \mathbb{F}_3^\times \right\} \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.
Es operiert G auf $\mathbb{F}_3^{2\times 1}$ via $A \cdot v := Av$, also via Multiplikation der Matrix $A \in G \subseteq \mathbb{F}_3^{2\times 2}$ mit dem Vektor $v \in \mathbb{F}_3^{2\times 1}$.

(1) Man bestimme die Ordnung $|G|$ der Gruppe G.

(2) Für $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_3^{2\times 1}$ bestimme man den Stabilisator $\operatorname{Stab}_G(x) \leqslant G$.

(3) Wieviele Elemente enthält die Bahn $G \cdot x$?
