Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/3	/4	/4	/6	/5	/2	/6	/ 30

Algebra Lehramt

Hausarbeit

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Falls in der Aufgabe Herleitungen oder Begründungen verlangt sind, sind diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen.
  Bevorzugtes Format: Einzelne pdf-Datei mit Nachnamen im Dateinamen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte) Man bestimme ein $a \in \mathbb{Z}$, für welches ein Ringisomorphismus wie folgt existiert.

$$\begin{array}{rccccc} \varphi \;:\; \mathbb{Z}/(a) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/(9) & \times & \mathbb{Z}/(5) \\ z+(a) & \mapsto & (z+(9) & , & z+(5)) \end{array}$$

Sei dazu $a = \boxed{45}$

Man bestimme die Abbildungsvorschrift für φ^{-1} :

$$\begin{array}{rccccc} \mathbb{Z}/(a) & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & \mathbb{Z}/(9) & \times & \mathbb{Z}/(5) \\ \boxed{10x - 9y + (45)} & \leftarrow\!\shortmid & (x+(9) & , & y+(5)) \end{array}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $f \in \mathrm{S}_6$ gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f : [1,6] & \to & [1,6] \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 6 \\ 5 & \mapsto & 3 \\ 6 & \mapsto & 4\,. \end{array}$$

(1) Man schreibe f in Zykeldarstellung: $f =$ $\boxed{(1,5,3)(4,6)}$

(2) Welche Ordnung hat f? $\boxed{6}$

(3) Man bestimme alle $k \in [1,6]$, für die f konjugiert zu f^k ist in S_6: $\boxed{k \in \{1,5\}}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 - X + 1)$.
Sei $\varepsilon := X + (X^3 - X + 1) \in \mathbb{F}_{27}$. Es ist also $\varepsilon^3 = \varepsilon - 1$.

(1) Entscheiden Sie, ob $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{27}) = \langle \varepsilon \rangle$ ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Ja, es ist $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{27}) = \langle \varepsilon \rangle$:
Es ist $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{27}) \simeq \mathrm{C}_{26}$ und daher $|\langle \varepsilon \rangle| \in \{1, 2, 13, 26\}$. Nun ist

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon^{13} & = & (\varepsilon)^{3\cdot 4+1} = (\varepsilon - 1)^4 \cdot \varepsilon = (\varepsilon - 1)(\varepsilon - 1)^3 \cdot \varepsilon = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^3 - 1) \cdot \varepsilon \\ & = & (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1) \cdot \varepsilon = \varepsilon^3 - \varepsilon = \varepsilon - 1 - \varepsilon = -1 \neq 1\,. \end{array}$$

Wegen $\varepsilon \neq 1 \neq \varepsilon^2$ folgt $|\langle \varepsilon \rangle| = 26$ und daher $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{27}) = \langle \varepsilon \rangle$.

(2) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\varepsilon^2,\mathbb{F}_3}(X) =$ $\boxed{X^3 + X^2 + X - 1}$

(3) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\varepsilon^3,\mathbb{F}_3}(X) =$ $\boxed{X^3 - X + 1}$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Man zeige oder widerlege.

(1) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Sei $V := \bigcap_{g\in G} {}^{g}U$. Es ist $V \trianglelefteqslant G$.

Richtig.

Für $x \in G$ ist

$$xVx^{-1} = x\left(\bigcap_{g\in G} gUg^{-1}\right)x^{-1} = \bigcap_{g\in G} xgUg^{-1}x^{-1} = \bigcap_{g\in G}(xg)U(xg)^{-1} = \bigcap_{g\in G} gUg^{-1} = V\ ,$$

denn $G = \{xg : g \in G\}$, da Multiplikation mit x eine Bijektion ist.

(2) Der Körper $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ ist algebraisch abgeschlossen.

Falsch.

Z.B. hat das Polynom $X^2 - 2$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

Denn: Es ist $(1, \mathrm{i})$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$. Wir zeigen, es gibt kein Element $a_0 + a_1\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$ mit $(a_0 + a_1\mathrm{i})^2 = 2$.

Annahme doch. Dann ist $(a_0 + a_1\mathrm{i})^2 = a_0^2 - a_1^2 + 2a_0a_1\mathrm{i} = 2 + 0 \cdot \mathrm{i}$. Koeffizientenvergleich liefert $2a_0a_1 = 0$, d.h. $a_1 = 0$ oder $a_0 = 0$. Somit ist $a_0^2 = 2$ oder $-a_1^2 = 2$, aber beides ist unlösbar in $\mathbb{Q}$.

Widerspruch.

(3) Es gibt abelsche Gruppen G_1, G_2, G_3 der Ordnung 24, die paarweise nichtisomorph sind.

Richtig.

Sei $G_1 := \mathrm{C}_8 \times \mathrm{C}_3$, sei $G_2 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3$, sei $G_3 := \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3$.

Es enthält G_1 ein Element der Ordnung 8, nicht aber G_2 oder G_3.

Also ist $G_1 \not\simeq G_2$ und $G_1 \not\simeq G_3$.

Es enthält G_2 ein Element der Ordnung 4, nicht aber G_3. Also ist $G_2 \not\simeq G_3$.

(4) Sei K ein Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ ein normiertes Polynom, welches in K keine Nullstelle hat. Dann ist $f(X)$ irreduzibel in $K[X]$.

Falsch.

Sei $K = \mathbb{Q}$. Das Polynom $X^4 + 2X^2 + 1$ ist normiert und hat in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle. Aber es ist $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$ und daher nicht irreduzibel.

(5) Sei G eine Gruppe von Ordnung 24. Dann ist $|\operatorname{Syl}_3(G)| \in \{1, 4\}$.

Richtig.

Es ist $24 = 3 \cdot 8$. Es ist $|\operatorname{Syl}_3(G)|$ und ein Teiler von 8, also $|\operatorname{Syl}_3(G)| \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Es ist $|\operatorname{Syl}_3(G)| \equiv_3 1$ und somit folgt $|\operatorname{Syl}_3(G)| \in \{1, 4\}$.

(6) Sei G eine endliche Gruppe. Seien $g,\ h \in G$ mit $G = \langle g, h\rangle$, mit $|\langle g\rangle| = 2$ und mit $|\langle h\rangle| = 5$. Es gibt keine transitive G-Menge X mit $|X| = 4$.

Richtig.

Angenommen, es gibt solch eine G-Menge X.

Sei $\varphi : G \to \mathrm{S}_X$ der Operationsmorphismus von G auf X. Die Ordnung von $\varphi(g)$ ist wegen des Satzes von Lagrange ein gemeinsamer Teiler von 2 und von $|\mathrm{S}_X| = 4! = 24$, d.h. $|\langle\varphi(g)\rangle| \in \{1, 2\}$. Ebenso ist die Ordnung von $\varphi(h)$ ein Teiler von 5 und von $|\mathrm{S}_X| = 24$, d.h. $|\langle\varphi(h)\rangle| = 1$ und folglich $\varphi(h) = \mathrm{id}_X$.

Jedes Element $k \in G$ lässt sich schreiben als endliches Produkt mit Faktoren aus $\{g, h\}$. Da φ ein Gruppenmorphismus ist, ist $\varphi(k) = \varphi(g)^i$ für $i \in \{0, 1\}$. D.h. für $x \in X$ ist $G \cdot x = \{x, \varphi(g)(x)\} \neq X$, im *Widerspruch* zur Transitivität von X.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei bekannt: Es ist $\cos(7x) = 64\cos(x)^7 - 112\cos(x)^5 + 56\cos(x)^3 - 7\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(1) Sei $c := 2\cos(\frac{\pi}{14})$. Man finde ein irreduzibles Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(c) = 0$.

$f(X) = \boxed{X^6 - 7X^4 + 14X^2 - 7}$

Begründung der Irreduzibilität:

Es ist $X^6 - 7X^4 + 14X^2 - 7$ irreduzibel dank Eisenstein mit $p = 7$, denn
$-7 \equiv_7 0$, $14 \equiv_7 0$, $-7 \equiv_7 0$ und $-7 \not\equiv_{7^2} 0$.

(2) Man folgere: Es ist nicht möglich, ausgehend von einer Strecke der Länge 1 mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\cos(\frac{\pi}{14})$ zu konstruieren.

Angenommen eine Strecke der Länge $\cos(\frac{\pi}{14})$ ist konstruierbar. Dann kann man diese verdoppeln, also ist auch $c = 2\cos(\frac{\pi}{14})$ konstruierbar.
Nun ist $[\mathbb{Q}(c) : \mathbb{Q}] = \deg(f(X)) = 6$ keine Potenz von 2. Daher ist $2\cos(\frac{\pi}{14})$ nicht konstruierbar.
Widerspruch.

(3) Man entscheide, ob es möglich ist, ein regelmäßiges 7-Eck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Es ist nicht möglich.
Annahme doch. Der Mittelpunkt des 7-Ecks ist Schnittpunkt von Mittelsenkrechten von Seiten. Durch Verbinden der Eckpunkte zum Mittelpunkt lässt sich der Winkel $\frac{2\pi}{7}$ konstruieren. Da man Winkel konstruktiv halbieren kann, kann man daraus den Winkel $\frac{\pi}{14}$ konstruieren. Da man konstruktiv ein Lot fällen kann, daraus $\cos(\frac{\pi}{14})$. *Widerspruch.*

Aufgabe 6 (2 Punkte) Seien G und H Gruppen mit $|G| = 18$ und $|H| = 15$. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus mit $|\varphi(G)| > 1$. Man bestimme $|\operatorname{Kern}(\varphi)|$.

Mit dem Homomorphiesatz folgt $|G/\operatorname{Kern}(\varphi)| = |\varphi(G)| > 1$. Da $\varphi(G) \leqslant H$ ist, folgt mit dem Satz von Lagrange $\frac{18}{|\operatorname{Kern}(\varphi)|} = |\varphi(G)| \in \{3, 5, 15\}$ und daher $|\operatorname{Kern}(\varphi)| = 6$.

Aufgabe 7 (6 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung 33.

(1) Man zeige: G ist isomorph zu $\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_{11}$.

Sei $M \in \operatorname{Syl}_3(G)$. Es ist $|\operatorname{Syl}_3(G)| \equiv_3 1$ und ein Teiler von 11, also gleich 1. Folglich ist $M \trianglelefteq G$.
Sei $N \in \operatorname{Syl}_{11}(G)$. Es ist $|\operatorname{Syl}_{11}(G)| \equiv_{11} 1$ und ein Teiler von 3, also gleich 1. Folglich ist $N \trianglelefteq G$.
Da 3 prim ist, ist $M \simeq \mathrm{C}_3$. Da 11 prim ist, ist $N \simeq \mathrm{C}_{11}$.
Es ist $M \cap N = 1$, da die Ordnungen $|M| = 3$ und $|N| = 11$ teilerfremd sind.
Es ist $|M| \cdot |N| = 3 \cdot 11 = 33$. Dank Bemerkung 158 folgt $G = M \times N \simeq \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_{11}$.

(2) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 3 in G: 2

(3) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 11 in G: 10

(4) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 33 in G: 20
