M. Künzer | Abgabe bis Di 30.06.20

Algebra für Lehramt, SoSe 20

Blatt 9

Aufgabe 33
Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ normiert. Man entscheide, ob $f(X)$ irreduzibel ist.

(1) $f(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$.

(2) $f(X) = X^5 - 25X^2 + 15X + 5$.

(3) $f(X) = (X+1)^5 - 2$.

(4) $f(X) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 6X + 5$.

Aufgabe 34
Sei $\zeta_3 := \exp(2\pi \mathrm{i}/3) \in \mathbb{C}$. Es ist $\zeta_3^3 = 1$.
Sei $\zeta_9 := \exp(2\pi \mathrm{i}/9) \in \mathbb{C}$. Es ist $\zeta_9^3 = \zeta_3$ und $\zeta_9^9 = 1$.
Wir haben die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\zeta_9)|\mathbb{Q}(\zeta_3)|\mathbb{Q}$.

(1) Man zeige durch eine Untersuchung der Nullstellen, daß $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Man folgere, daß $\mu_{\zeta_3,\mathbb{Q}}(X) = X^2 + X + 1$ ist.

(2) Man zeige durch eine Translation, gefolgt von Eisenstein, daß $X^6 + X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Man folgere, daß $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}}(X) = X^6 + X^3 + 1$ ist.

(3) Man bestimme die Grade $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}(\zeta_3)]$.

(4) Man bestimme $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X) \in \mathbb{Q}(\zeta_3)[X]$.

Aufgabe 35

(1) Man konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_{81}$ mit $|\mathbb{F}_{81}| = 81$, wobei ein Erzeuger γ das Minimalpolynom $\mu_{\gamma,\mathbb{F}_3}(X) = X^4 + X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ über $\mathbb{F}_3$ habe.

(2) Man bestimme $\{\, u \in \mathbb{F}_{81} \,:\, \mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(u) = u \,\}$.

(3) Man finde in $\mathbb{F}_{81}$ einen Teilkörper Z isomorph zu $\mathbb{F}_9$.

(4) Man bestimme $\mu_{\gamma,Z}(X) \in Z[X]$. Man finde $g(X) \in Z[X]$ mit $\mu_{\gamma,\mathbb{F}_3}(X) = \mu_{\gamma,Z}(X) \cdot g(X)$.

Aufgabe 36

(1) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nach $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.
Welche davon schränken zu Automorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein?

(2) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nach $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.
Welche davon schränken zu Automorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ein?