Algebra für Lehramt, SoSe 20

Blatt 8

Aufgabe 29

Man entscheide, ob es eine einfache Gruppe der Ordnung n gibt.

(1) $n = 24$

(2) $n = 23$

(3) $n = 42$

(4) $n = 360$

Aufgabe 30

(1) Gibt es in A_5 eine Untergruppe der Ordnung 15 ?

(2) Sei G eine Gruppe, in welcher $x^2 = 1$ ist für $x \in G$. Ist G abelsch?

(3) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Ist jede nichtabelsche Gruppe von Ordnung $2n$ isomorph zu D_{2n} ?

(4) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 5}$. Hat S_n außer 1, A_n und S_n noch weitere Normalteiler?

Aufgabe 31

Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}$.

(1) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X)$.
Man bestimme eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Man bestimme den Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$ der Körpererweiterung.

(2) Man bestimme ein Ideal $I \trianglelefteqslant \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathbb{Q}[X]/I \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(3) Sei $c := a_0 + a_1\sqrt{2}$, wobei a_0 , $a_1 \in \mathbb{Q}$. Falls $c \neq 0$ ist, so berechne man c^{-1}.
Hinweis: $(a_0 + a_1\sqrt{2})(a_0 - a_1\sqrt{2}) = a_0^2 - 2a_1^2$.

(4) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{1-2\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 32

(1) Man konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_9$ mit 9 Elementen. (Vorsicht: $\mathbb{Z}/(9)$ ist kein Körper.)

(2) Man erstelle die Additionstafel von $\mathbb{F}_9$.

(3) Man erstelle die Multiplikationstafel von $\mathbb{F}_9$.

(4) Man gebe zu jedem Element in $\mathbb{F}_9^\times$ das multiplikativ Inverse an.