Algebra für Lehramt, SoSe 20

Blatt 4

Aufgabe 13

(1) Man zeige $\mathrm{S}_4 = \langle (1,2), (1,2,3,4) \rangle$.

(2) Man zeige $\mathrm{A}_4 = \langle (1,2,3), (1,2)(3,4) \rangle$.

Aufgabe 14

(1) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Zu zeigen ist folgendes.
Es ist $(\sim_U)$ eine Äquivalenzrelation. Für $x \in G$ ist xU die Äquivalenzklasse von $x \in G$.
Vgl. Definition 86.(2).

(2) Sei G eine Gruppe. Sei $U \trianglelefteqslant V \trianglelefteqslant G$. Ist dann $U \trianglelefteqslant G$?

(3) Seien R und S Ringe. Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringmorphismus.
Ist $\varphi(\mathrm{U}(R)) \subseteq \mathrm{U}(S)$?
Ist die Einschränkung $\varphi|_{\mathrm{U}(R)}^{\mathrm{U}(S)} : \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S) : x \mapsto \varphi(x)$ ein Gruppenmorphismus?

Aufgabe 15

(1) Ist $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/(15))$ zyklisch?

(2) Ist $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/(16))$ zyklisch?

(3) Sei $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 5}$ prim. Ist die Ordnung von 3 in $\mathbb{F}_p^\times = \mathrm{U}(\mathbb{F}_p)$ gleich $p-1$?

(4) Gibt es ein $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 7}$ derart, daß 3 in $\mathbb{F}_p^\times$ die Ordnung 4 hat?

Aufgabe 16

(1) Gibt es ein $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ prim mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ abelsch?
Gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteqslant \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ mit $1 < |N| < |\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)|$?

(2) Wir betrachten den Ringmorphismus $f : \mathbb{Z}/(4) \to \mathbb{Z}/(2) : x + (4) \mapsto x + (2)$.
Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}/(4) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{F}_2$.
Wir betrachten den Gruppenmorphismus

$$\varphi \ : \ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(4)) \ \to \ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(2)) \ : \ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \ \mapsto \ \left(\begin{smallmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{smallmatrix}\right) \ .$$

Welche Ordnung hat $\mathrm{Kern}(\varphi)$? Ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ abelsch?

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/alg20/`