Algebra für Lehramt, SoSe 20

Blatt 3

Aufgabe 9 Sei R ein faktorieller Ring. Seien $x,\ y \in R^\times$.
Man zeige oder widerlege.

(1) Sei z ein größter gemeinsamer Teiler von x und y. Dann ist $(x, y) = (z)$.

(2) Liege $z \in R$ mit $(x, y) = (z)$ vor. Dann ist z ein größter gemeinsamer Teiler von x und y.

(3) Es ist $(x \cdot y) = (x) \cap (y)$.

(4) Ist 1 ein größter gemeinsamer Teiler von x und y, dann ist $(x \cdot y) = (x) \cap (y)$.

Aufgabe 10 Sei R ein Integritätsbereich.

(1) Sei $x \in R^\times \smallsetminus \mathrm{U}(R)$ gegeben, also weder null noch invertierbar.
Man zeige, daß x genau dann prim ist, wenn $R/(x)$ ein Integritätsbereich ist.

(2) Seien $x,\ y \in R$ gegeben mit $(x, y) = (1)$. Man zeige, daß der Ringmorphismus

$$\begin{array}{rcccc} R & \to & R/(x) & \times & R/(y) \\ r & \mapsto & (r + (x) & , & r + (y)) \end{array}$$

surjektiv ist. Man bestimme seinen Kern, in Abhängigkeit von x und y.

Aufgabe 11 Sei p prim.

(1) Man weise $|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ nach.

(2) Man bestimme $e := \mathrm{v}_p(|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)|)$.
Man bestimme eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ von Ordnung p^e.

(3) Man weise $|\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)| = (p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2)$ nach.

(4) Man bestimme $e := \mathrm{v}_p(|\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)|)$.
Man bestimme eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ von Ordnung p^e.

Aufgabe 12 In den Antworten ist die Zykelschreibweise für Elemente der symmetrischen Gruppe zu verwenden.

(1) Ist S_3 abelsch?

(2) Ist $\mathrm{S}_3 = \langle (1, 2), (2, 3) \rangle$?

(3) Gibt es in S_4 eine zyklische Untergruppe von Ordnung 6 ?

(4) Gibt es in S_4 eine nichtabelsche Untergruppe von Ordnung 8 ?