Algebra für Lehramt, SoSe 20

Blatt 11

Aufgabe 41 Sei K ein endlicher Körper. Wir schreiben $q := |K|$.

(1) Man zeige, daß q eine Potenz einer Primzahl ist.

(2) Man bestimme x^{q-1} für $x \in K^\times$.

(3) Man bestimme $x^q - x + 1$ für $x \in K$.

(4) Ist K algebraisch abgeschlossen?

Aufgabe 42 Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum.
Sei $X \subseteq V$ eine Teilmenge, nicht notwendig endlich.
Eine *Linearkombination* in X ist ein Element der Form $\sum_{i\in[1,n]} \lambda_i x_i \in V$, wobei $n \geqslant 0$, wobei $x_i \in X$ für $i \in [1,n]$, wobei $x_i \neq x_j$ für $i,\, j \in [1,n]$ mit $i \neq j$ und wobei $\lambda_i \in K$ für $i \in [1,n]$.
Eine solche Linearkombination heißt *nichttrivial*, falls es ein $i \in [1,n]$ gibt mit $\lambda_i \neq 0$.
Es heißt X *linear unabhängig*, wenn jede nichttriviale Linearkombination in X ungleich 0 ist.
Es heißt X *erzeugend*, wenn jedes Element von V eine Linearkombination in X ist.
Es heißt X eine *Basis* von V, wenn X linear unabhängig und erzeugend ist.

(1) Seien $Y \subseteq Z \subseteq V$ gegeben mit Y linear unabhängig und mit Z erzeugend.
Sei $\mathcal{U} := \{\, X \,:\, \text{es ist } Y \subseteq X \subseteq Z \text{ und } X \text{ linear unabhängig} \,\}$. Es ist $\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \subseteq)$ ein Poset.
Man zeige, daß in $\mathcal{U}$ jede Kette eine obere Schranke besitzt.

(2) Man zeige, daß es in $\mathcal{U}$ ein maximales Element gibt und daß dies eine Basis von V ist.

Aufgabe 43 Sei K ein Körper. Sei $L|K$ ein algebraischer Abschluß.

(1) Man finde eine Abbildung $\varphi : L \to K[X]^\times$ mit $|\varphi^{-1}(f(X))| \leqslant \deg(f(X))$ für $f(X) \in K[X]^\times$.

(2) Sei $\operatorname{char}(K) = 0$. Sei $f(X) \in K[X]$ normiert und irreduzibel.
Man zeige $|\{\, y \in L \,:\, f(y) = 0 \,\}| = \deg(f(X))$.

(3) Sei K endlich. Sei $f(X) \in K[X]$ normiert und irreduzibel.
Man zeige $|\{\, y \in L \,:\, f(y) = 0 \,\}| = \deg(f(X))$.

Aufgabe 44 Sei X ein endliches Poset. Sei $x \in X$.
Man zeige die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b).

(a) Es ist x ein terminales Element von X.

(b) Es ist x das einzige maximale Element von X.

Trifft diese Äquivalenz auch noch zu, wenn X nicht mehr als endlich vorausgesetzt wird?