UNIVERSITÄT STUTTGART

PROF. DR. STEFFEN KÖNIG

Algebra – Modulklausur am 7.8.2020

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Semester: ______________________

Studiengang: ______________________

UNTERSCHRIFT: ______________________

NUR VON DER AUFSICHT AUSZUFÜLLEN:

Anzahl der abgegebenen Lösungsbögen: ______________________

Anmerkungen: ______________________

____

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine, außer Kugelschreiber oder Füller.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Geben Sie bitte auf jedem Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an. Lösungsbögen ohne diese Daten werden nicht gewertet.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass die Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Viel Erfolg!

	1	2	3	4	5	6
Punkte						

Aufgaben

Bei allen Antworten sind Begründungen oder nachvollziehbare Rechenwege verlangt.
Ein Gruppenhomomorphismus ist dasselbe wie ein Gruppenmorphismus.

1. *(1+3+3+1 = 8 Punkte.)*

   Sei $T := \mathbb{R}^{2\times 2} = \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$.

   Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,\, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq T$.

   (a) Ist S ein Rechtsideal von T?
   (b) Ist S ein Teilring von T?
   (c) Konstruieren Sie einen Ringisomorphismus von $\mathbb{C}$ nach S.
   (d) Ist S ein Körper?

2. *(2+1+1+2+2 = 8 Punkte.)*

   Sei G eine einfache Gruppe von Ordnung $|G| = 60$.

   (a) Bestimmen Sie die Anzahl $|\mathrm{Syl}_5(G)|$ der 5-Sylowuntergruppen von G.
   (b) Ist jede 5-Sylowuntergruppe von G zyklisch?
   (c) Wieviele Elemente der Ordnung 5 enthält G?
   (d) Gibt es eine transitive G-Menge mit 4 Elementen?
   (e) Bestimmen Sie die Anzahl $|\mathrm{Syl}_3(G)|$ der 3-Sylowuntergruppen von G.

3. *(2+1+4+2 = 9 Punkte.)*

   (a) Ist das Polynom $X^3 - 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel?
   (b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Element mit $\alpha^3 - 2\alpha - 2 = 0$.
   Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$.
   (c) Berechnen Sie das Minimalpolynom von α^2 über $\mathbb{Q}$.
   (d) Gibt es ein Element in $\mathbb{Q}(\alpha)$, das ein Minimalpolynom von Grad 2 über $\mathbb{Q}$ hat?

4. *(2+1+1+2+1 = 7 Punkte.)*

   (a) Geben Sie ein irreduzibles normiertes Polynom $m(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ von Grad 3 an.
   (b) Konstruieren Sie unter Verwendung von $m(X)$ eine Körpererweiterung L über $\mathbb{F}_3$ mit $|L| = 27$.
   (c) Gibt es einen Ringisomorphismus von $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ nach L?
   (d) Gibt es in $L \setminus \{1\}$ ein Element y mit $y^{13} = 1$?
   (e) Gibt es eine endliche Körpererweiterung M über L mit $[M : L] \geqslant 2$?

5. *(3+3 = 6 Punkte.)*

   Sei U die Gruppe der multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

   (a) Bestimmen Sie die maximale Ordnung der Elemente von U.
   (b) Bestimmen Sie ein direktes Produkt zyklischer Gruppen, das isomorph ist zu U.

6. *(2+3+2 = 7 Punkte.)*

   Folgende Aussagen sind zu zeigen oder zu widerlegen.

   (a) Sei L über K eine Körpererweiterung. Sei K nicht algebraisch abgeschlossen. Sei L algebraisch abgeschlossen. Dann ist $[L : K] = \infty$.
   (b) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $N \trianglelefteqslant G$ ein Normalteiler.
   Sind N und G/N abelsch, dann ist auch G abelsch.
   (c) Sei G eine Gruppe. Sei $N \trianglelefteqslant G$ ein Normalteiler. Dann gibt es eine Gruppe H und einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $N = \mathrm{Kern}(\varphi)$.