C. Dietzel, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 20

Lösung 5

Aufgabe 17

(1) Man bestimme die disjunkte Zerlegung von S_5 in Konjugationsklassen.

(2) Man bestimme für jede der Konjugationsklassen aus (1) die Anzahl ihrer Elemente.

(3) Ist eine der Konjugationsklassen aus (1) eine treue S_5-Menge unter der Konjugationsoperation?

Lösung zu Aufgabe 17:

(1) Wir wissen bereits (Bemerkung 103), dass wenn $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{S}_n$ konjugiert zueinander sind, diese auch dieselben Zykellängen besitzen.

Haben umgekehrt $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{S}_n$ in Zykeldarstellung

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (k_{1,1}, \ldots, k_{1,l_1})(k_{2,1}, \ldots, k_{2,l_2}) \ldots (k_{m,1}, \ldots, k_{m,l_m})\\ \pi_2 &= (k'_{1,1}, \ldots, k'_{1,l_1})(k'_{2,1}, \ldots, k'_{2,l_2}) \ldots (k'_{m,1}, \ldots, k'_{m,l_m})\end{aligned}$$

dieselben Zykellängen (wie durch die Notation hier angedeutet) so ist, ebenfalls nach Bemerkung 103, ${}^{\psi}\pi_1 = \pi_2$ vermöge der Bijektion

$$\begin{aligned}\psi : [1, n] &\to [1, n]\\ k_{i,j} &\mapsto k'_{i,j} \quad (1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq l_i)\end{aligned}$$

(hierbei müssen selbstverständlich auch Zykel der Länge 1 in der Zykelschreibweise inkludiert werden).

Es folgt, dass zwei Elemente $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{S}_n$ konjugiert zueinander sind, sofern ihre Zykellängen sowie deren Vielfachheiten übereinstimmen.

Die möglichen Zykellängentupel für ein Element in S_5 sind: (5), $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$.

Repräsentanten für die entsprechenden Konjugationsklassen sind

$$\begin{aligned}&(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4)(5) \ = \ (1, 2, 3, 4),\\ &(1, 2, 3)(4, 5),\\ &(1, 2, 3)(4)(5) = (1, 2, 3),\\ &(1, 2)(3, 4)(5) = (1, 2)(3, 4),\\ &(1, 2)(3)(4)(5) = (1, 2),\\ &(1)(2)(3)(4)(5) = \mathrm{id}\ .\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathrm{S}_5 \ = \ {}^{\mathrm{S}_5}(1, 2, 3, 4, 5) \sqcup {}^{\mathrm{S}_5}(1, 2, 3, 4) \sqcup {}^{\mathrm{S}_5}(1, 2, 3)(4, 5) \sqcup {}^{\mathrm{S}_5}(1, 2, 3) \sqcup {}^{\mathrm{S}_5}(1, 2)(3, 4) \sqcup {}^{\mathrm{S}_5}(1, 2) \sqcup {}^{\mathrm{S}_5}\mathrm{id}$$

die gesuchte disjunkte Zerlegung.

(2) Wir bestimmen die Größen der Konjugationsklassen für die jeweiligen Zykellängentupel. Hierbei wollen wir nicht auflisten und abzählen, was man auch tun kann, sondern stattdessen argumentieren.

(5) Wir bestimmen, wieviele *verschiedene* Elemente der Form (a, b, c, d, e) es in S_5 gibt. Für die Belegung der Positionen a, b, c, d, e gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten. Hierbei stellen zwei Belegungen dasselbe Element dar, sofern sie sich nur hinsichtlich des Startpunkts des Zykels unterscheiden, d.h. genau 5 verschiedene Belegungen führen auf dasselbe Element $(a, b, c, d, e) \in S_5$.

Auf jedes Element dieser Form in S_5 fallen also genau 5 Belegungen, somit gibt es $\frac{120}{5} = 24$ Elemente mit dem Zykellängentupel (5).

(4, 1) Ein Element mit diesem Zykellängentupel hat die Form (a, b, c, d). Für die Belegung von a, b, c, d gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ Möglichkeiten. Weiterhin argumentiert man wie oben, dass jeweils 4 verschiedene Belegungen für a, b, c, d das gleiche Element (a, b, c, d) repräsentieren. Somit gibt es $\frac{120}{4} = 30$ Elemente mit dem Zykellängentupel $(4, 1)$.

(3, 2) Ein Element mit diesem Zykellängentupel hat die Form $(a, b, c)(d, e)$. Für die Belegung von a, b, c, d, e gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten. Jede zyklische Permutation von a, b, c ergibt das gleiche Element in S_5, genauso jede zyklische Permutation von d, e. Da es 3 zyklische Permutationen von a, b, c gibt und 2 von d, e, gibt es je $3 \cdot 2 = 6$ Belegungen, die das gleiche Element $(a, b, c)(d, e)$ repräsentieren. Folglich gibt es $\frac{120}{6} = 20$ Elemente dieser Form.

(3, 1, 1) Ein Element mit diesem Zykellängentupel hat die Form (a, b, c). Für die Belegung von a, b, c gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten. Weiterhin repräsentieren je 3 Belegungen von a, b, c dasselbe Element in S_5. Somit gibt es $\frac{60}{3} = 20$ Elemente mit dem Zykellängentupel $(3, 1, 1)$.

(2, 2, 1) Ein Element mit diesem Zykellängentupel hat die Form $(a, b)(c, d)$. a, b, c, d können auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ verschiedene Weisen belegt werden. Zwei solche Belegungen ergeben das gleiche Element, wenn sie sich um eine zyklische Permutation von a, b bzw. c, d (je 2 Möglichkeiten) sowie eine eventuelle Vertauschung der Zykel $(a, b), (c, d)$ unterscheiden (da $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$ ist) (2 Möglichkeiten). Insgesamt ergeben also je $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Belegungen von a, b, c, d das gleiche Element.

Damit gibt es $\frac{120}{8} = 15$ Elemente mit dem Zykellängentupel $(2, 2, 1)$.

(2, 1, 1, 1) Ein Element mit diesem Zykellängentupel hat die Form (a, b). Für die Belegung von a, b gibt es $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten. Weiterhin repräsentieren je 2 Belegungen von a, b dasselbe Element in S_5. Somit gibt es $\frac{20}{2} = 10$ Elemente mit dem Zykellängentupel $(2, 1, 1, 1)$.

(1, 1, 1, 1, 1) Es gibt nur 1 Element mit diesem Zykellängentupel, nämlich id.

Wir überprüfen unsere Rechnungen: da die Konjugationsklassen eine disjunkte Zerlegung der S_5 liefern, müssen wir in der Summe auf 120 Elemente kommen:

$$24 + 30 + 20 + 20 + 15 + 10 + 1 = 120 \quad \checkmark$$

Mit diesem Argument lässt sich allgemeiner zeigen, dass in der Gruppe S_n für ein Element π mit dem Zykellängentupel $(l_k^{m_k}, l_{k-1}^{m_{k-1}}, \ldots, 1^{m_1})$, in welchem die Exponenten eine Wiederholung des Eintrags kennzeichnen, allgemeiner gilt:

$$\left|{}^{S_n}\pi\right| = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} l_i^{m_i} \cdot m_i!}$$

(3) Ja. Wir zeigen, dass S_5 treu auf $X := {}^{\mathrm{S}_5}(1,2,3,4,5)$ operiert:

Sei nun $\varphi : \mathrm{S}_5 \to \mathrm{S}_X$ der zu der S_5-Menge gehörige Gruppenmorphismus. Wir haben φ als injektiv nachzuweisen, d.h. $\mathrm{Kern}(\varphi) \stackrel{!}{=} 1$.

Sei ein Element $\pi \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ gegeben. Es operiere also π auf X als Identität. Mit anderen Worten, es bleibt jedes $x \in X$ fix unter Konjugation mit π.

Wir müssen $\pi \stackrel{!}{=} \mathrm{id}$ zeigen.

Es ist ${}^{\pi}(1,2,3,4,5) = (\pi(1),\pi(2),\pi(3),\pi(4),\pi(5))$. Ist also ${}^{\pi}(1,2,3,4,5) = (1,2,3,4,5)$, so muss $(1,2,3,4,5) = (\pi(1),\pi(2),\pi(3),\pi(4),\pi(5))$ sein, d.h. π muss die zyklische Ordnung der Elemente $1,2,3,4,5$ respektieren. Dies ist nur der Fall, wenn $\pi \in \langle(1,2,3,4,5)\rangle$ ist.

Analog gilt ${}^{\pi}(2,1,3,4,5) = (2,1,3,4,5)$ genau dann, wenn $\pi \in \langle(2,1,3,4,5)\rangle$ ist.

Fixiert aber ein $\pi \in \mathrm{S}_5$ *alle* Elemente aus ${}^{\mathrm{S}_5}(1,2,3,4,5)$ vermöge der Konjugationsoperation, dann fixiert π auch $(1,2,3,4,5)$ und $(2,1,3,4,5)$. Es folgt

$$\pi \;\in\; \langle(1,2,3,4,5)\rangle \cap \langle(2,1,3,4,5)\rangle \;=\; \{\mathrm{id}\} \;=\; 1\,,$$

wie zu zeigen war.

Aufgabe 18

Seien X und Y Mengen. Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung.
Man konstruiere einen Gruppenisomorphismus von S_X nach S_Y und sein Inverses.
Kann es mehr als einen Gruppenisomorphismus von S_X nach S_Y geben?

Lösung zu Aufgabe 18:

(1) Wir behaupten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_f : \mathrm{S}_X &\to \mathrm{S}_Y\\ \pi &\mapsto f \circ \pi \circ f^{-1}\end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Wohldefiniertheit: Wenn $\pi : X \to X$ eine Bijektion ist, so ist auch $\varphi_f(\pi) = f \circ \pi \circ f^{-1}$ als Verknüpfung bijektiver Abbildungen eine Bijektion.

Gruppenmorphismeneigenschaft: Wenn $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{S}_X$ sind, so ist

$$\begin{aligned}\varphi_f(\pi_1 \circ \pi_2) &= f \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ f^{-1}\\ &= f \circ \pi_1 \circ f^{-1} \circ f \circ \pi_2 \circ f^{-1}\\ &= \varphi_f(\pi_1) \circ \varphi_f(\pi_2).\end{aligned}$$

Bijektivität: Für $\rho \in \mathrm{S}_Y$ lösen wir die Gleichung $\varphi_f(\pi) = \rho$ nach π auf:

$$\begin{aligned}\varphi_f(\pi) &= \rho\\ \Leftrightarrow f \circ \pi \circ f^{-1} &= \rho\\ \Leftrightarrow f^{-1} \circ f \circ \pi \circ f^{-1} \circ f &= f^{-1} \circ \rho \circ f\\ \Leftrightarrow \pi &= f^{-1} \circ \rho \circ f\end{aligned}$$

ρ hat also das eindeutige Urbild $f^{-1} \circ \rho \circ f$. Somit ist φ_f bijektiv.

Es folgt, dass φ_f ein Gruppenisomorphismus ist. Unter *Bijektivität* haben wir auch sein Inverses als $\psi_f : \mathrm{S}_Y \to \mathrm{S}_X; \rho \mapsto f^{-1} \circ \rho \circ f$ konstruiert.

(2) Es würde hier als Lösung genügen, ein Beispiel zu nennen, in welchem es mehrere Isomorphismen gibt. Ein solches wäre $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,2,3\}$, also $\mathrm{S}_X = \mathrm{S}_3$ und $\mathrm{S}_Y = \mathrm{S}_3$.

Wir wollen etwas allgemeiner zeigen: Wenn $|X| = |Y| > 2$ gilt, gibt es verschiedene Isomorphismen zwischen S_X und S_Y: wir wählen $x_1, x_2, x_3 \in X$ und definieren $\alpha \in \mathrm{S}_X$ über

$$\alpha(x) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x = x_1 \\ x_1 & \text{falls } x = x_2 \\ x & \text{falls } x \in X \setminus \{x_1, x_2\} \end{cases},$$

d.h. α vertauscht x_1 mit x_2 und lässt sonst alles, wie es ist. Ähnlich definieren wir $\beta \in \mathrm{S}_X$ als

$$\beta(x) = \begin{cases} x_3 & \text{falls } x = x_2 \\ x_2 & \text{falls } x = x_3 \\ x & \text{falls } x \in X \setminus \{x_2, x_3\} \end{cases}.$$

Es ist ${}^{\beta}\alpha \neq \alpha$, denn es ist $\alpha(x_3) = x_3$, andererseits ist

$$({}^{\beta}\alpha)(x_3) = (\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1})(x_3) = (\beta \circ \alpha)(x_2) = \beta(x_1) = x_1.$$

Wir setzen $c_\beta : \mathrm{S}_X \to \mathrm{S}_X : \pi \mapsto {}^{\beta}\pi$. Diese Abbildung definiert einen Automorphismus von S_X. Weiterhin ist $c_\beta \neq \mathrm{id}_{\mathrm{S}_X}$.

Sei $\varphi_f : \mathrm{S}_X \to \mathrm{S}_Y$ der wie in (1) definierte Isomorphismus. Dann ist $\varphi_f \circ c_\beta$ als Verknüpfung von Isomorphismen ebenfalls einer. Außerdem gilt $\varphi_f \circ c_\beta \neq \varphi_f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{S}_X} = \varphi_f$.

Wir haben also gezeigt, dass es für $|X| = |Y| > 2$ stets mehrere Isomorphismen zwischen S_X und S_Y gibt.

Aufgabe 19

Seien G und H Gruppen.
Sei $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenmorphismus. Sei $N \trianglelefteq H$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $\varphi^{-1}(N) \trianglelefteq G$.

(2) Es ist $G/\varphi^{-1}(N)$ isomorph zu H/N.

Lösung zu Aufgabe 19:
Da $\varphi : G \to H$ und $\rho_{H,N} : H \to H/N : h \mapsto hN$ surjektive Gruppenmorphismen sind, ist $\psi := \rho_{H,N} \circ \varphi : G \to H/N$ ebenfalls ein surjektiver Gruppenmorphismus.
Wir bestimmen außerdem den Kern:

$$\mathrm{Kern}(\psi) = \psi^{-1}(1N) = \varphi^{-1}\left(\rho_{H,N}^{-1}(1N)\right) = \varphi^{-1}(N).$$

Nach dieser Vorarbeit gehen wir auf die beiden Aufgabenteile ein:

(1) Es ist $\mathrm{Kern}(\psi) \trianglelefteq G$ nach Bemerkung 98(1), somit folgt $\varphi^{-1}(N) \trianglelefteq G$.

Man kann selbstverständlich diesen Aufgabenteil auch durch eine direkte Überprüfung beantworten:

Einerseits ist $\varphi^{-1}(N)$ eine Untergruppe von G. Dies wollen wir nun zeigen:

Da N eine Untergruppe von H ist, ist auch $\varphi(1_G) = 1_H \in N$, folglich ist $1_G \in \varphi^{-1}(N)$.

Sind andererseits $g_1, g_2 \in \varphi^{-1}(N)$, so sind $\varphi(g_1), \varphi(g_2) \in N$ und somit ist auch $\varphi(g_1 g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} \in N$. Demnach ist $g_1 g_2^{-1} \in \varphi^{-1}(N)$.

Wir wissen nun, dass $\varphi^{-1}(N)$ eine Untergruppe ist. Wir zeigen, dass sie auch ein Normalteiler ist:

Ist $g_1 \in \varphi^{-1}(N)$ und $g_2 \in G$ beliebig, so ist $\varphi(g_1) \in N$. Da weiterhin N ein Normalteiler in H ist, ist auch

$$\varphi({}^{g_2}g_1) = \varphi(g_2 g_1 g_2^{-1}) = \varphi(g_2)\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = {}^{\varphi(g_2)}\varphi(g_1) \in N.$$

Somit ist ${}^{g_2}g_1 \in \varphi^{-1}(N)$, was zu zeigen war.

(2) Da ψ surjektiv ist, folgt aus dem Homomorphiesatz (Satz 107):

$$G/\varphi^{-1}(N) \;=\; G/\operatorname{Kern}(\psi) \;\cong\; H/N\,.$$

Aufgabe 20 Sei $G := \langle\, (1,2,3,4),\ (1,3)\,\rangle \leqslant \mathrm{S}_4\,$.

(1) Ist $\{1,2,3,4\}$ eine transitive G-Menge?

(2) Man zerlege G in Konjugationsklassen.

(3) Man bestimme das Zentrum $\mathrm{Z}(G)$.

Lösung zu Aufgabe 20:

(1) Ja. Es ist $(1,2,3,4)\cdot 1 = 2$, $(1,2,3,4)^2 \cdot 1 = 3$ und $(1,2,3,4)^3 \cdot 1 = 4$. Daraus folgt $G \cdot 1 = \{1,2,3,4\}$, somit besitzt G nur eine Bahn und ist transitiv.

(2) Wir setzen $a = (1,2,3,4)$ und $b = (1,3)$. Wir wissen bereits (Scan 18.05.20-5), dass jedes Element aus $G = \langle a, b\rangle$ eindeutig in der Form $a^i \circ b^j$ mit $0 \le i \le 3$ und $0 \le j \le 1$ darstellbar ist. Weiterhin gelten die Gleichungen $b \circ a = a^{-1} \circ b$, $a^4 = \mathrm{id}$ und $b^2 = \mathrm{id}$. Diese werden wir im Folgenden verwenden:

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} {}^{b}a &= b \circ a \circ b^{-1} = a^{-1} \circ b \circ b^{-1} = a^{-1} \\ {}^{a}b &= a \circ b \circ a^{-1} = a \circ a \circ b = a^2 \circ b. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Bahnen der einzelnen Elemente von G unter Konjugation, also die Konjugationsklassen:

id: Da id das neutrale Element ist, ist $\{\mathrm{id}\}$ die Bahn von id.

a: Für $0 \le i \le 3$ ist ${}^{a^i}a = a^i \circ a \circ a^{-i} = a$.
Weiterhin ist ${}^{b}a = a^{-1}$. Damit gilt für alle $0 \le i \le 3$, dass ${}^{a^i b}a = {}^{a^i}(a^{-1}) = a^{-1}$ ist.
Wir bemerken, dass $a^{-1} = a^3$ ist. Für alle $\pi \in G$ ist somit ${}^{\pi}a \in \{a, a^3\}$. Dies ist die Bahn von a - und damit auch von a^3.

a^2: Für alle $0 \le i \le 3$ ist ${}^{a^i}(a^2) = a^2$.
Weiterhin ist ${}^{b}(a^2) = ({}^{b}a)^2 = (a^{-1})^2 = a^{-2} = a^2$. Damit gilt für $0 \le i \le 3$, dass ${}^{a^i b}(a^2) = {}^{a^i}(a^2) = a^2$ ist.
Wir sehen, dass für alle $\pi \in G$ gilt, dass ${}^{\pi}(a^2) = a^2$ ist. Somit ist $\{a^2\}$ die Bahn von a^2.

b: Wir wissen bereits, dass ${}^{a}b = a^2 \circ b$ ist. Damit ist ${}^{a^2}b = {}^{a}(a^2 \circ b) = {}^{a}(a^2) \circ {}^{a}b = a^2 \circ a^2 \circ b = a^4 \circ b = b$. Eine Wiederholung dieses Arguments zeigt:

$$ {}^{a^i}b = \begin{cases} b & \text{falls } i \equiv_2 0 \\ a^2 \circ b & \text{falls } i \equiv_2 1 \end{cases} $$

Somit gilt auch für alle $0 \leq i \leq 3$:

$$ {}^{a^i b}b = {}^{a^i}({}^{b}b) = {}^{a^i}b = \begin{cases} b & \text{falls } i \equiv_2 0 \\ a^2 \circ b & \text{falls } i \equiv_2 1 \end{cases} $$

Somit gilt für alle $\pi \in G$, dass ${}^{\pi}b \in \{b, a^2 \circ b\}$ ist. Letzteres ist damit die Bahn von b und von $a^2 \circ b$.

$a \circ b$ Es ist ${}^{b}(a \circ b) = ({}^{b}a) \circ ({}^{b}b) = a^{-1} \circ b = a^3 \circ b$. Weitere Elemente kann die Konjugationsklasse von $a \circ b$ nicht enthalten, da wir alle anderen Elemente bereits in anderen Konjugationsklassen lokalisiert haben. Somit ist $\{a \circ b, a^3 \circ b\}$ die Konjugationsklasse von $a \circ b$ sowie von $a^3 \circ b$.

Wir fassen zusammen: die Konjugationsklassen in G sind $\{\mathrm{id}\}$, $\{a, a^3\}$, $\{a^2\}$, $\{b, a^2 \circ b\}$, $\{a \circ b, a^3 \circ b\}$. Es ist G deren disjunkte Vereinigung.

(3) $\mathrm{Z}(G)$ besteht aus genau denjenigen $g \in G$, bei denen für alle $\pi \in G$ gilt, dass ${}^{\pi}g = g$ ist, d.h. deren Konjugationsklasse $\{g\}$ ist. Aus den Ergebnissen aus (2) folgt

$$ \mathrm{Z}(G) \; = \; \{\mathrm{id}, a^2\} \; = \; \langle a^2 \rangle \; . $$

pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/alg20/