

## Lösungen Klausur II

### Aufgabe 1.

- (1) Es werden  $\det A = -1$  und  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (2) Es wird  $\det A = 0$ . Die Matrix  $A$  ist mithin nicht invertierbar.
- (3) Es werden  $\det A = 1$  und  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 2.** Umgeformt wird  $(A|b|c)$  (z.B.) zu  $\left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ .

- (1) Es ist  $\text{rk } A = 3$ .
- (2) Eine Basis des Lösungsraums  $\{x \in \mathbb{F}_3^5 \mid Ax = 0\}$  ist gegeben durch  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .
- (3) Es ist  $\{x \in \mathbb{F}_3^5 \mid Ax = b\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .
- (4) Es ist  $\{x \in \mathbb{F}_3^5 \mid Ax = c\} = \emptyset$  (leere Menge).

### Aufgabe 3.

- (1) (a) Es ist  $\chi_A(X) = (X - 1)^2 X$ .
- (b) Es wird  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $E_A(1)$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $E_A(0)$ . Ferner wird  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $H_A(1)$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $H_A(0)$ .
- (c) Mit (z.B.)  $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  wird  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (d) Es ist  $\mu_A(X) = \mu_{S^{-1}AS}(X) = (X - 1)^2 X$  (es ist also gleich dem charakteristischen Polynom).
- (2) (a) Es ist  $\chi_A(X) = (X - 1)^5$ .
- (b) Es wird  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$  eine Basis von  $E_A(1)$ . Ferner ist  $H_A(1) = \mathbb{C}^5$ , d.h. jede Basis von  $\mathbb{C}^5$  ist eine Basis von  $H_A(1)$ .
- (c) Mit (z.B.)  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  wird  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (d) Es ist  $\mu_A(X) = \mu_{S^{-1}AS}(X) = (X - 1)^3$  (Maximum der Jordanblockgrößen).

### Aufgabe 4.

- (1) Wegen  $\bar{A}^t A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$  ungleich  $A \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  ist  $A$  nicht normal, also insbesondere weder hermitesch noch unitär. Da  $A$  nicht normal ist, ist  $A$  auch nicht unitär diagonalisierbar.
- (2) Wegen  $\bar{A}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$  ist  $A$  unitär, und damit auch normal, wegen  $A \neq \bar{A}^t$  aber nicht hermitesch.

Insbesondere ist  $A$  unitär diagonalisierbar. Es ist  $\chi_A(X) = (X - i)^2(X + i)$ , und es werden  $E_A(i) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  und  $E_A(-i) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Mit  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  wird somit  $\bar{U}^t A U = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.**

- (1) Wir wenden das Hauptminorkriterium an und finden  $\det(1) = 1 > 0$ ,  $\det \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} = 2 > 0$  und  $\det \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ . Damit ist  $A$  positiv definit.
- (2) Wir wenden die Cramersche Regel an. Es ist  $\det A_{2,3} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \beta^2 & \beta \end{pmatrix} = 0$ , da die dritte Spalte gleich der Summe aus der ersten und dem  $\beta$ -fachen der zweiten ist. Es folgt, daß  $A^{-1}$  an Position  $(3, 2)$  in der Tat den Eintrag 0 aufweist.
- (3) Sei  $x_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$  für  $n \geq 2$ , speziell  $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Es wird  $x_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} x_n$ , und wir erhalten  $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+2)$ . Mit  $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  und entsprechend  $S^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$  wird  $S^{-1}AS = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: B}$ .

Damit wird

$$\begin{aligned}
 x_n &= A^{n-2}x_2 \\
 &= SB^{n-2}S^{-1}x_2 \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{n-2} \\ 20-6n \\ -6 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

und mithin  $a_n = ((-2)^n - 6n + 8)/9$  (auch für  $n \in \{0, 1\}$ ).

**Aufgabe 6.**

- (1) Die Aussage ist richtig. Da  $A$  hermitesch ist, sind seine Hauptdiagonaleinträge reell. Da  $A$  dazuhin positiv definit ist, sind seine Hauptdiagonaleinträge positiv. Selbiges gilt dann auch für die Summe.  
Alternativ: die Spur von  $A$  ist die Summe der Eigenwerte, und letztere sind bei einer positiv definiten hermiteschen Matrix reell und positiv.
- (2) Die Aussage ist falsch, da z.B.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ebenfalls unitär und hermitesch ist.
- (3) Die Aussage ist falsch. Sei etwa  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 0, aber  $\bar{x}^t y = 1 \neq 0$ .
- (4) Die Aussage ist richtig. Die Matrix  $A$  hat Rang  $\text{rk } A \leq \text{rk } x = 1$ , da  $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ . Wegen  $x \neq 0$  hat  $A$  nun einen nichtverschwindenden Diagonaleintrag, und somit ist  $\text{rk } A = 1$ . Wegen  $\bar{A}^t = \overline{(x\bar{x}^t)}^t = x\bar{x}^t = A$  ist  $A$  hermitesch, und damit diagonalisierbar. Also ist  $\dim E_A(0) = \dim H_A(0) = n-1$ . Ferner ist  $Ax = (x\bar{x}^t)x = x(\bar{x}^t x)$ , womit  $x$  als Eigenvektor zum Eigenwert  $\bar{x}^t x$  gezeigt ist. Also ist  $\dim E_A(\bar{x}^t x) = \dim H_A(\bar{x}^t x) = 1$ .
- (5) Die Aussage ist richtig. Es ist  $\pi(\rho) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , und genauso für  $\pi(\sigma)$ . Damit ist  $(\pi(\rho) + \pi(\sigma)) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ , und folglich ist  $\pi(\rho) + \pi(\sigma)$  singulär.