

Lösungen Klausur I

Aufgabe 1.

- (1) Wir erhalten $\sigma = (3, 7, 5)(4, 6)$ und $\tau = (2, 5)(3, 4)$. Es hat σ die Ordnung 6, und τ die Ordnung 2.
- (2) Es wird $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (2, 3)(6, 7)$.
- (3) Es werden $\varepsilon_\sigma = -1$ und $\varepsilon_{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}} = +1$.
- (4) Da die Signumsabbildung ein Gruppenmorphismus ist, gilt in der Tat $\varepsilon_{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma^{-1} = \varepsilon_\tau$.
- (5) Die angegebene Menge ist keine Untergruppe, da $(1, 2)(3, 4) \circ ((1, 3)(2, 4))^{-1} = (1, 4)(2, 3)$ nicht in U liegt.

Aufgabe 2.

- (1) Wir erhalten $1^{-1} = 1$, $5^{-1} = 5$, $7^{-1} = 7$ und $11^{-1} = 11$.
- (2) Modulo 5 haben wir $3x \equiv_5 1$ zu lösen und erhalten $x \equiv_5 2$. Der Ansatz $x = 2 + 5k$ führt auf $y = (1 - 3x)/5 = -1 - 3k$. Also

$$\{(x, y) \in \mathbf{Z} \mid 3x + 5y = 1\} = \{(2 + 5k, -1 - 3k) \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

- (3) (i) $R = \mathbf{Z}/91\mathbf{Z}$ ist kein Körper, da $91 = 7 \cdot 13$ keine Primzahl ist. Es ist $\#R = 91$.
- (ii) $R = \mathbf{F}_4[X]/(X^3 + X + 1)$ ist ein Körper, da das Polynom $f(X) := X^3 + X + 1$ in $\mathbf{F}_4$ keine Nullstelle hat. In der Tat ist $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(\alpha) = \alpha$ und $f(\alpha + 1) = \alpha + 1$. Es ist $\#R = 4^3 = 64$.

Aufgabe 3.

- (1) Wir können z.B. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ auswählen, so daß $\dim\langle \underline{x} \rangle = 1$. Es ist $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht im Erzeugnis von $\underline{x}$ enthalten.
- (2) Wir können z.B. $\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ auswählen, so daß $\dim\langle \underline{x} \rangle = 2$. Es ist $y = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ im Erzeugnis von $\underline{x}$ enthalten.
- (3) Wir berechnen das Tupel in standardisierter Form zu $(\beta^2, 1 + \beta, \beta + \beta^2, 1 + \beta + \beta^2)$. Das Teiltupel $(\beta^2, 1 + \beta, \beta + \beta^2)$ erzeugt bereits $\mathbf{F}_8$, da $y = 1 = (1 + \beta) + (\beta + \beta^2) + \beta^2$, $\beta = (\beta + \beta^2) + \beta^2$ und β^2 im Erzeugnis liegen. Da dieses Tupel nur aus $3 = \dim_{\mathbf{F}_2} \mathbf{F}_8$ Elementen besteht, ist es auch linear unabhängig, und also eine Basis von $\mathbf{F}_8$. Insbesondere ist $\dim_{\mathbf{F}_2} \langle \underline{x} \rangle = \dim_{\mathbf{F}_2} \mathbf{F}_8 = 3$.

Alternativ: Die Multiplikation mit β^2 ist ein $\mathbf{F}_2$ -linearer Isomorphismus von $\mathbf{F}_8$ in sich. Da $(1, \beta, \beta^2)$ eine Basis von $\mathbf{F}_8$ über $\mathbf{F}_2$ ist, ist auch $(\beta^2, \beta^3, \beta^4)$ eine Basis von $\mathbf{F}_8$ über $\mathbf{F}_2$. Damit ist $y = 1 \in \langle \underline{x} \rangle = \mathbf{F}_8$ und $\dim_{\mathbf{F}_2} \langle \underline{x} \rangle = \dim_{\mathbf{F}_2} \mathbf{F}_8 = 3$.

Aufgabe 4.

- (1) Die Abbildung f ist linear. Das Tupel $(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist linear unabhängig. Also ist f injektiv. Da $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^4 = 4$ ist, kann dieses Tupel nicht erzeugend sein. Also ist f nicht surjektiv.
- (2) Die Abbildung f ist nicht linear über $\mathbf{C}$. Zum Beispiel ist $i \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$, während $f\left(i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$ ist.
- (3) Die Abbildung f ist linear. Ist $g(X) = \sum_{j \geq 0} a_j X^j$, dann ist sein Bild unter f gleich $\sum_{j \geq 1} 2j a_j X^{2j}$. Die Abbildung f ist nicht surjektiv, da z.B. X nicht im Bild liegt. Sie ist nicht injektiv, da jedes konstante Polynom auf 0 abgebildet wird.

- (4) Die Abbildung ist linear (da $(\lambda\xi + \mu\eta)^3 = \lambda\xi^3 + \mu\eta^3$ für $\lambda, \mu \in \mathbf{F}_3$ und $\xi, \eta \in \mathbf{F}_9$). Das Tupel $(f(1), f(\iota)) = (1, -\iota)$ ist eine Basis von $\mathbf{F}_9$ über $\mathbf{F}_3$. Damit ist f bijektiv.

Aufgabe 5. Die Ordnung von $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ ist gleich 3, und die Ordnung von $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbf{F}_2)$ ist gleich 7.

Aufgabe 6.

- (1) Es ist jeweils die lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

T : Aus $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$ folgt mit dem ersten Eintrag, daß $\lambda_1 = 0$, mit dem zweiten Eintrag, daß $\lambda_2 = 0$, und mit dem fünften Eintrag, daß $\lambda_3 = 0$.

U : Aus $\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 = 0$ folgt mit dem ersten Eintrag, daß $\mu_1 = 0$, und mit dem fünften Eintrag, daß $\mu_2 = 0$. Nun folgt mit dem zweiten Eintrag, daß $\mu_3 = 0$.

- (2) Es ist $T + U = \langle y_1, y_2, y_3, z_2 \rangle$, da dieses Erzeugnis bereits $z_1 = y_1 + y_2$ und $z_3 = y_2 + y_3 + z_2$ enthält. Dieses Tupel ist auch linear unabhängig, da man aus $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \mu_2 z_2 = 0$ wie in (1) folgern kann, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, und da dann mit dem dritten Eintrag folgt, daß $\lambda_3 = 0$, und schließlich mit dem fünften, daß $\mu_2 = 0$.

Wir erhalten $\dim(T \cap U) = 3 + 3 - 4 = 2$, und somit $\#(T \cap U) = 2^{\dim(T \cap U)} = 4$.

- (3) Den bereits verwandten Gleichungen $z_1 = y_1 + y_2$ und $z_3 = y_2 + y_3 + z_2$ entnimmt man, daß $z_1, z_2 + z_3 \in T \cap U$. Da das Tupel $(z_1, z_2 + z_3)$ linear unabhängig ist, stellt es eine Basis von $T \cap U$ dar.

Z.B. gilt für $U' = \langle z_2 \rangle$, daß $T \cap U' = 0$. Also ist $T \oplus U'$ direkt. (Man kann statt z_2 jeden Vektor von U heranziehen, der nicht in T liegt.)

Aufgabe 7.

- (1) Ist wahr. Für $u \in U$ liegt $f(u)$ in $\text{Im } f = \text{Kern } g$, woraus $g(f(u)) = 0$.
- (2) Ist falsch. Seien etwa $U = V = W = K$, und sei $f = g = 0$. Es ist $\text{Im } f = 0$ und $\text{Kern } g = V$.
- (3) Ist wahr. Sei $v \in V$. Aus $g(f(v)) = 0$ und $\text{Kern } g = 0$ folgt $f(v) = 0$.
- (4) Ist wahr. Mit der Dimensionsformel ist $\dim U = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Im } f$ und $\dim V = \dim \text{Kern } g + \dim \text{Im } g$. Da $\text{Im } f \leq \text{Kern } g$, und somit $\dim \text{Im } f \leq \dim \text{Kern } g$, ist

$$\dim U - \dim V = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Im } f - \dim \text{Kern } g - \dim \text{Im } g \leq \dim \text{Kern } f - \dim \text{Im } g.$$

- (5) Ist wahr. Angenommen, $\text{Kern } f = \text{Im } f$. Dann ist $\dim V = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Im } f = 2 \cdot \dim \text{Kern } f$ gerade, und das ist ein Widerspruch. Also ist $\text{Kern } f \neq \text{Im } f$. Die Bedingung $f \circ f = 0$ ist redundant.