14.02.2003

Klausur II
Lineare Algebra für Informatiker

Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

Zeit: 180 Minuten.

In der Klausur sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, kann jederzeit welches nachbekommen.

Aufgabe 1. **(10 Punkte)**

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$. Bestimme die Determinante der Matrix $A \in K^{n\times n}$. Falls A regulär ist, so gib ihre Inverse A^{-1} an. (Hinweis: eine der Matrizen ist singulär.)

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha+1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_4^{3\times 3}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_2^{4\times 4}$.

Aufgabe 2. **(8 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_3^{4\times 5}$, sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_3^4$, und sei $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_3^4$.

(1) Bestimme $\operatorname{rk} A$.

(2) Bestimme eine Basis des Lösungsraums $\{x \in \mathbf{F}_3^5 \mid Ax = 0\}$.

(3) Bestimme $\{x \in \mathbf{F}_3^5 \mid Ax = b\}$.

(4) Bestimme $\{x \in \mathbf{F}_3^5 \mid Ax = c\}$.

(Hinweis: forme simultan $(A|b|c)$ um.)

Aufgabe 3. **(2 × (2+3+3+2) Punkte)**

Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Bestimme jeweils

(a) das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ von A,

(b) Basen der Eigenräume und der Haupträume von A,

(c) die Jordansche Normalform von A, und

(d) das Minimalpolynom $\mu_A(X)$ von A.

(Hinweis: (b) und (c) können simultan gelöst werden.)

Die Matrizen seien hierzu gegeben durch

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. **(8 Punkte)**

Sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Entscheide, ob A normal, hermitesch bzw. unitär ist, und begründe die Entscheidung. Diagonalisiere A unitär falls möglich.

(1) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5. **(9 Punkte)**

(1) Untersuche die hermitesche Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times 3}$ auf Definitheit.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & 1 \\ \beta & \beta^2 & \beta & \beta^2 \\ 0 & \beta & \beta^2 & \beta^2 \\ 1 & \beta^2 & \beta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{F}_8)$ als invertierbar bekannt. Zeige: der Eintrag an der Position $(3, 2)$ von A^{-1} ist gleich 0.

(3) Seien $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, und sei $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ für $n \geq 3$, wobei $a_n \in \mathbf{C}$ stets. Berechne a_n für $n \geq 0$.

Aufgabe 6. **(5 Punkte)**

Sei $n \geq 1$. Zeige, oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels.

(1) Ist $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ hermitesch und positiv definit, so ist ihre Spur $\operatorname{tr} A$ reell und positiv.

(2) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die einzige Matrix in $\mathbf{C}^{2\times 2}$, die zugleich unitär und hermitesch ist.

(3) Sind x und y Eigenvektoren von $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ zu verschiedenen Eigenwerten, so ist $\bar{x}^{\mathrm{t}} y = 0$.

(4) Ist $x \in \mathbf{C}^n \smallsetminus \{0\}$ und $A = x\bar{x}^{\mathrm{t}}$, so ist $\dim E_A(\bar{x}^{\mathrm{t}} x) = \dim H_A(\bar{x}^{\mathrm{t}} x) = 1$ und $\dim E_A(0) = \dim H_A(0) = n - 1$.

(5) In $\mathbf{F}_2^{n\times n}$ ist die Summe zweier beliebiger Permutationsmatrizen singulär.