13.12.2002

Klausur I
Lineare Algebra für Informatiker

Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

Zeit: 120 Minuten.

In der Klausur sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, kann jederzeit welches nachbekommen.

Aufgabe 1. **(5 Punkte)**

Es seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_9$.

(1) Schreibe σ und τ in Zykelschreibweise. Gib die Ordnung von σ und von τ an.

(2) Berechne $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ (in Zykelschreibweise).

(3) Bestimme die Signen ε_σ und $\varepsilon_{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}}$.

(4) Sei $n \geq 1$, seien $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ nun beliebig gewählt. Zeige, oder widerlege mittels Gegenbeispiel: $\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}}$.

(5) Ist $\{1,\ (1,3)(2,4),\ (1,2)(3,4)\}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$? Begründe.

Aufgabe 2. **(6 Punkte)**

(1) Gib die multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ samt Inversen an.

(2) Bestimme $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid 3x + 5y = 1\}$ in der Form $\{(ak + b, ck + d) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ mit geeigneten $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$.

(3) Welche der folgenden kommutativen Ringe R sind Körper? Entscheide und begründe. Gib $\#R$ an.

(i) $R = \mathbf{Z}/91\mathbf{Z}$.

(ii) $R = \mathbf{F}_4[X]/(X^3 + X + 1)\mathbf{F}_4[X]$.

Aufgabe 3. **(6 Punkte)**

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Gib eine aus $\underline{x}$ ausgewählte Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ und die Dimension von $\langle \underline{x} \rangle$ an. Ist $y \in \langle \underline{x} \rangle$?

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^3$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $y = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -3i \end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_8$, $\underline{x} = (\beta^2, \beta^3, \beta^4, \beta^5)$, $y = 1$.

Aufgabe 4. **(8 Punkte)**

Sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K, und sei $V \xrightarrow{f} W$ eine Abbildung. Entscheide, ob f eine lineare Abbildung ist; begründe diese Entscheidung aber **nur,** falls f **keine** lineare Abbildung ist. Falls f eine lineare Abbildung ist, dann entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist und begründe dies.

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathbf{R}^4$, $f : \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \eta_2+\eta_3 \\ \eta_2-\eta_3 \\ \eta_1-\eta_3 \\ \eta_1+\eta_3 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^2$, $W = \mathbf{C}^2$, $f : \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_2 \\ \bar{\zeta}_1 \end{pmatrix}$. Hierbei wird für $\zeta = x + iy$ mit $x, y \in \mathbf{R}$ mit $\bar{\zeta} = x - iy$ sein komplex konjugiertes Element bezeichnet.

(3) $K = \mathbf{R}$, $V = W = \mathbf{R}[X]$, $f : g(X) \longmapsto X \cdot D(g(X^2))$. Hierbei bezeichnet D die Operation des Ableitens nach X.

(4) $K = \mathbf{F}_3$, $V = W = \mathbf{F}_9$, $f : \xi \longmapsto \xi^3$.

Aufgabe 5. **(4 Punkte)**

Bestimme die Ordnung von $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ und von $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_2)$. (Hinweis: In beiden Fällen ist die Ordnung ≤ 10.)

Aufgabe 6. **(6 Punkte)**

Sei $K = \mathbf{F}_2$, und sei $V = \mathbf{F}_2^5$. Seien

$$(y_1, y_2, y_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad (z_1, z_2, z_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

und seien $T := \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ und $U := \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$.

(1) Zeige, daß (y_1, y_2, y_3) eine Basis von T ist und daß (z_1, z_2, z_3) eine Basis von U ist.

(2) Gib eine Basis und die Dimension von $T + U$ an. Berechne daraus $\dim_{\mathbf{F}_2}(T \cap U)$ und bestimme so $\#(T \cap U)$.

(3) Gib eine Basis von $T \cap U$ an. Gib einen eindimensionalen Untervektorraum $U' \leq U$ so an, daß die Summe $T \oplus U'$ direkt ist.

Aufgabe 7. **(5 Punkte)**

Sei K ein Körper, seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, und seien $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen. Die Abbildung 0 zwischen Vektorräumen schickt jeden Vektor auf den Nullvektor. Folgene Aussagen sind zu zeigen, oder mittels Gegenbeispiel zu widerlegen.

(1) Ist $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Kern}\, g$, so ist $g \circ f = 0$.

(2) Ist $g \circ f = 0$, so ist $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Kern}\, g$.

(3) Ist g injektiv und $g \circ f = 0$, so ist auch $f = 0$.

(4) Ist $g \circ f = 0$, so ist $\dim U - \dim V \leq \dim \mathrm{Kern}\, f - \dim \mathrm{Im}\, g$.

(5) Ist $U = V$ von ungerader Dimension und ist $f \circ f = 0$, so ist $\mathrm{Im}\, f \neq \mathrm{Kern}\, f$.