

Klausur I

Lineare Algebra für Informatiker

Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

Zeit: 120 Minuten.

In der Klausur sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, kann jederzeit welches nachbekommen.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Es seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_9$.

- (1) Schreibe σ und τ in Zykelschreibweise. Gib die Ordnung von σ und von τ an.
- (2) Berechne $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ (in Zykelschreibweise).
- (3) Bestimme die Signen ε_σ und $\varepsilon_{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}}$.
- (4) Sei $n \geq 1$, seien $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ nun beliebig gewählt. Zeige, oder widerlege mittels Gegenbeispiel: $\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}}$.
- (5) Ist $\{1, (1, 3)(2, 4), (1, 2)(3, 4)\}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$? Begründe.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

- (1) Gib die multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ samt Inversen an.
- (2) Bestimme $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid 3x + 5y = 1\}$ in der Form $\{(ak + b, ck + d) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ mit geeigneten $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$.
- (3) Welche der folgenden kommutativen Ringe R sind Körper? Entscheide und begründe. Gib $\#R$ an.
 - (i) $R = \mathbf{Z}/91\mathbf{Z}$.
 - (ii) $R = \mathbf{F}_4[X]/(X^3 + X + 1)\mathbf{F}_4[X]$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Gib eine aus $\underline{x}$ ausgewählte Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ und die Dimension von $\langle \underline{x} \rangle$ an. Ist $y \in \langle \underline{x} \rangle$?

- (1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (2) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^3$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $y = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -3i \end{pmatrix}$.
- (3) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_8$, $\underline{x} = (\beta^2, \beta^3, \beta^4, \beta^5)$, $y = 1$.

Aufgabe 4.**(8 Punkte)**

Sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K , und sei $V \xrightarrow{f} W$ eine Abbildung. Entscheide, ob f eine lineare Abbildung ist; begründe diese Entscheidung aber **nur**, falls f **keine** lineare Abbildung ist. Falls f eine lineare Abbildung ist, dann entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist und begründe dies.

- (1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathbf{R}^4$, $f : \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_2 + \eta_3 \\ \eta_2 - \eta_3 \\ \eta_1 - \eta_3 \\ \eta_1 + \eta_3 \end{pmatrix}$.
- (2) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^2$, $W = \mathbf{C}^2$, $f : \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_2 \\ \bar{\zeta}_1 \end{pmatrix}$. Hierbei wird für $\zeta = x + iy$ mit $x, y \in \mathbf{R}$ mit $\bar{\zeta} = x - iy$ sein komplex konjugiertes Element bezeichnet.
- (3) $K = \mathbf{R}$, $V = W = \mathbf{R}[X]$, $f : g(X) \mapsto X \cdot D(g(X^2))$. Hierbei bezeichnet D die Operation des Ableitens nach X .
- (4) $K = \mathbf{F}_3$, $V = W = \mathbf{F}_9$, $f : \xi \mapsto \xi^3$.

Aufgabe 5.**(4 Punkte)**

Bestimme die Ordnung von $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ und von $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_2)$. (Hinweis: In beiden Fällen ist die Ordnung ≤ 10 .)

Aufgabe 6.**(6 Punkte)**

Sei $K = \mathbf{F}_2$, und sei $V = \mathbf{F}_2^5$. Seien

$$(y_1, y_2, y_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad (z_1, z_2, z_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

und seien $T := \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ und $U := \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$.

- (1) Zeige, daß (y_1, y_2, y_3) eine Basis von T ist und daß (z_1, z_2, z_3) eine Basis von U ist.
- (2) Gib eine Basis und die Dimension von $T + U$ an. Berechne daraus $\dim_{\mathbf{F}_2}(T \cap U)$ und bestimme so $\#(T \cap U)$.
- (3) Gib eine Basis von $T \cap U$ an. Gib einen eindimensionalen Untervektorraum $U' \leq U$ so an, daß die Summe $T \oplus U'$ direkt ist.

Aufgabe 7.**(5 Punkte)**

Sei K ein Körper, seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über K , und seien $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen. Die Abbildung 0 zwischen Vektorräumen schickt jeden Vektor auf den Nullvektor. Folgende Aussagen sind zu zeigen, oder mittels Gegenbeispiel zu widerlegen.

- (1) Ist $\mathrm{Im} f = \mathrm{Kern} g$, so ist $g \circ f = 0$.
- (2) Ist $g \circ f = 0$, so ist $\mathrm{Im} f = \mathrm{Kern} g$.
- (3) Ist g injektiv und $g \circ f = 0$, so ist auch $f = 0$.
- (4) Ist $g \circ f = 0$, so ist $\dim U - \dim V \leq \dim \mathrm{Kern} f - \dim \mathrm{Im} g$.
- (5) Ist $U = V$ von ungerader Dimension und ist $f \circ f = 0$, so ist $\mathrm{Im} f \neq \mathrm{Kern} f$.