

Aufgabe 34.

- (1) Die Relation ist reflexiv (wähle $S = 1, T = 1$), symmetrisch (multipliziere mit $S^{-1} \in \text{GL}_m(K)$ von links und $T^{-1} \in \text{GL}_n(K)$ von rechts) und transitiv (verwende Multiplikation in $\text{GL}_m(K)$, bzw. in $\text{GL}_n(K)$). Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ sei $f_A : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$ definiert, d.h. A ist die beschreibende Matrix zu f_A , bezüglich der Standardbasen.

Die Zeilenstufenform von A sei GA mit $G \in \text{GL}_m(K)$. Sei d die Anzahl der ausgewählten Spalten. Durch elementare Spaltenoperationen, d.h. durch Multiplikation mit einer Matrix $H \in \text{GL}_n(K)$ von rechts, bringe man GA auf die Form $GAH = \begin{pmatrix} E_d & 0_{d, n-d} \\ 0_{m-d, d} & 0_{m-d, n-d} \end{pmatrix} =: D_d$.

Wegen $d = \dim \text{Im } f_{GAH} = \dim G(\text{Im } f) = \dim \text{Im } f$ ist A zu genau einer Matrix dieser Form äquivalent.

Es ist also $\{D_0, \dots, D_{\min(m,n)}\}$ ein Repräsentantensystem.

- (2) Die Relation ist reflexiv (wähle $S = 1$), symmetrisch (multipliziere mit S von links und mit S^{-1} von rechts) und transitiv: Aus $A, B, C \in K^{n \times n}$ mit $A \sim B, B \sim C$, d.h. mit $S, \tilde{S} \in \text{GL}_n(K)$, $B = S^{-1}AS$ und $C = \tilde{S}^{-1}B\tilde{S}$, folgt $C = \tilde{S}^{-1}S^{-1}AS\tilde{S}$. Da $(S\tilde{S})^{-1} = \tilde{S}^{-1}S^{-1} \in \text{GL}_n(K)$, folgt $A \sim C$.
- (3) Die Ähnlichkeitsklassen sind:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ein Repräsentantensystem ist z.B.:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 35.

- (1) Es ist $A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(1)_{\underline{x}', \underline{x}} = (A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\text{Damit ist } A(f)_{\underline{x}', \underline{x}'} = A(1)_{\underline{x}', \underline{x}} A(f)_{\underline{x}, \underline{x}} A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (2) Es ist $A(1)_{\underline{y}', \underline{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Damit ist } A(f)_{\underline{y}', \underline{x}'} = A(1)_{\underline{y}', \underline{y}} A(f)_{\underline{y}, \underline{x}} A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (3) Es ist $A(1)_{\underline{x}', \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & i & 1+i \\ -1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$ und $A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = (A(1)_{\underline{x}', \underline{x}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2-2i & -1+i & 1+i \\ 1+i & -1-i & i \\ -1-2i & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$.

$$\text{Damit ist } A(f)_{\underline{x}', \underline{x}'} = A(1)_{\underline{x}', \underline{x}} A(f)_{\underline{x}, \underline{x}} A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (4) Es ist $A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ und $A(1)_{\underline{x}', \underline{x}} = (A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{Damit ist } A(f)_{\underline{x}', \underline{x}'} = A(1)_{\underline{x}', \underline{x}} A(f)_{\underline{x}, \underline{x}} A(1)_{\underline{x}, \underline{x}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.

- (1) Bringt man A auf Zeilenstufenform GA mit einer Matrix $G \in \text{GL}_2(\mathbf{R})$, so gilt für die erweiterte Matrix $G(A|b) = G \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & 4 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$.

Damit ist $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 0\} = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ die homogene Lösung und $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = b\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ die inhomogene Lösung.

- (2) Bringt man A auf Zeilenstufenform GA mit einer Matrix $G \in \text{GL}_6(\mathbf{F}_5)$, so gilt für die erweiterte

$$\text{Matrix } G(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Damit ist $\{x \in \mathbf{F}_5^4 \mid Ax = 0\} = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ die homogene Lösung. Es ist $\{x \in \mathbf{F}_5^4 \mid Ax = b\} = \emptyset$.

- (3) Bringt man A auf Zeilenstufenform GA mit einer Matrix $G \in \text{GL}_3(\mathbf{F}_4)$, so gilt für die erweiterte

$$\text{Matrix } G(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 & 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Damit ist $\{x \in \mathbf{F}_4^7 \mid Ax = 0\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ die homogene Lösung und

$\{x \in \mathbf{F}_4^7 \mid Ax = b\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1+\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ die inhomogene Lösung.

Aufgabe 37.

Die in den Erzeugnissen angegebenen erzeugenden Tupel der Untervektorräume werden als Spaltenvektoren in die Matrizen $\bar{U} \in \mathbf{F}_8^{5 \times 4}$ und $\bar{V} \in \mathbf{F}_8^{5 \times 3}$ geschrieben. Ist $(\bar{U}|\bar{V}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{U}x + \bar{V}y = 0$ mit $x \in \mathbf{F}_8^4$ und $y \in \mathbf{F}_8^3$, so ist $\bar{V}y = \bar{U}x \in U \cap V$. Die Matrix $(\bar{U}|\bar{V})$ wird in Zeilenstufenform zu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \beta^2+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \beta^2+\beta & \beta^2+\beta+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta^2 & \beta^2+\beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \beta^2+\beta+1 \end{array} \right).$$

Damit ist $\{z \in \mathbf{F}_8^7 \mid (\bar{U}|\bar{V})z = 0\} = \langle \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2+\beta \\ \beta^2 \\ \frac{1}{\beta^2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta^2+1 \\ \beta^2+\beta+1 \\ \beta^2+\beta+1 \\ 0 \\ \beta^2+\beta+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Also ist $U \cap V = \langle \bar{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{V} \begin{pmatrix} \beta^2+\beta+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ \beta+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta^2+\beta+1 \end{pmatrix} \rangle$.

Aufgabe 38.

- (1) Seien $n \geq 1$ und $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gegeben. Dann ist $\sigma = \prod \tau_i$ ein Produkt von Transpositionen, und da $\mathcal{S}_n \xrightarrow{\pi} \text{GL}(K^n)$ (für einen beliebigen Körper K) ein Gruppenmorphismus ist, gilt für die Permutationsmatrix $\pi(\rho) = \prod \pi(\tau_i)$. Also genügt es, die Aussage für eine Transposition zu zeigen. Anstelle $\tau = (k, l)$ mit $k, l \in [1, n]$ und $k < l$ zu betrachten, reicht es, nach Umnummerierung, $\tau = (1, 2) \in \mathcal{S}_2$ zu untersuchen.

Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}(-1)E_{2,1}(1)E_{1,2}(-1)\text{diag}(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (2) Das Bild des injektiven Gruppenmorphismus $\mathcal{S}_n \xrightarrow{\pi} \text{GL}_n(K)$ ist eine Untergruppe von $\text{GL}_n(\mathbf{F}_p)$. Damit gilt $\#\mathcal{S}_n = n!$ teilt $\#\text{GL}_n(\mathbf{F}_p) = (p^n - p^0)(p^n - p^1) \cdots (p^n - p^{n-1})$ (vgl. Aufgaben 4.(1), 2.(4) und 30.(1)).