

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 34 (2+2+4 Punkte). Seien K ein Körper und $m, n \geq 1$.

- (1) Zeige, daß auf $K^{m \times n}$ durch $A \sim B \Leftrightarrow \exists S \in \text{GL}_m(K), \exists T \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = SAT$ eine Äquivalenzrelation definiert ist, und gib ein Repräsentantensystem an.
- (2) Zeige, daß auf $K^{n \times n}$ durch $A \sim B \Leftrightarrow \exists S \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = S^{-1}AS$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. (Äquivalente Matrizen $A \sim B$ heißen auch *ähnlich*.)
- (3) Gib die Ähnlichkeitsklassen für die Ähnlichkeitsrelation aus (2) auf $K^{n \times n} = \mathbf{F}_3^{2 \times 2}$ an. Wähle ein Repräsentantensystem aus.
(Hinweis: Es gibt 12 Ähnlichkeitsklassen).

Aufgabe 35 (4*2 Punkte).

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $V \xrightarrow{f} W$ ein linearer Abbildung.

Seien $\underline{x}, \underline{x}'$ Basen von V und $\underline{y}, \underline{y}'$ Basen von W . Berechne jeweils $A(f)_{\underline{y}, \underline{x}'}$.

- (1) $K = \mathbf{R}, V = W = \mathbf{R}^2, \underline{x} = \underline{y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis von $\mathbf{R}^2$,
 $\underline{x}' = \underline{y}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), A(f)_{\underline{x}, \underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (2) $K = \mathbf{R}, V = \mathbf{R}^3, W = \mathbf{R}^4, \underline{x}$ die Standardbasis von $\mathbf{R}^3, \underline{y}$ die Standardbasis von $\mathbf{R}^4$,
 $\underline{x}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \underline{y}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), A(f)_{\underline{y}, \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- (3) $K = \mathbf{C}, V = W = \mathbf{C}^3, \underline{x} = \underline{y} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$
 $\underline{x}' = \underline{y}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), A(f)_{\underline{x}, \underline{x}} = \begin{pmatrix} 1+i & 1+3i & 2 \\ i & -2 & 0 \\ \frac{1}{2}(1-i) & 3 & 1-i \end{pmatrix}$.
- (4) $K = \mathbf{F}_7, V = W = \mathbf{F}_7^4, \underline{x} = \underline{y}$ die Standardbasis von $\mathbf{F}_7^4$,
 $\underline{x}' = \underline{y}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right), A(f)_{\underline{x}, \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 36 (3*2 Punkte).

Seien K ein Körper, $n, m \geq 1, A \in K^{m \times n}, b \in K^m$. Gib jeweils $\{x \in K^n \mid Ax = 0\} = \langle x_{1;1}, \dots, x_{1;l} \rangle$ mit $(x_{1;1}, \dots, x_{1;l})$ linear unabhängig und $\{x \in K^n \mid Ax = b\} = x_0 + \langle x_{1;1}, \dots, x_{1;l} \rangle$ an.

- (1) $K = \mathbf{R}, A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (2) $K = \mathbf{F}_5, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (3) $K = \mathbf{F}_4, A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha+1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 37 (3 Punkte).

Seien $U, V \leq \mathbf{F}_8^5$ Untervektorräume von $\mathbf{F}_8^5$ über $\mathbf{F}_8$ mit

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^2 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta^2+1 \\ 0 \\ \beta^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2+\beta \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta+1 \\ \beta^2+\beta+1 \\ \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ \beta+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimme eine Basis von $U \cap V$.

(Hinweis: Zeilenstufenform.)

Aufgabe 38 (2+1 Punkte).

- (1) Zeige: Jede Permutationsmatrix ist Produkt von Elementarmatrizen und Diagonalmatrizen.
(Hinweis: Warum genügt es, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu betrachten?)
- (2) Seien p eine Primzahl und $n \in \mathbf{N}$. Zeige: $n!$ teilt $(p^n - p^0)(p^n - p^1) \cdots (p^n - p^{n-1})$.
(Hinweis: $\#\mathcal{S}_n = n!$)