Blatt #8, 5. Dez. 2002

Aufgabe 29.

(1) $ABC = \left(\begin{smallmatrix} -10 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} -10 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $AA^{\mathrm{t}}ABB^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 185 & 160 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) Beachte $BC = 0$ und $BB^{\mathrm{t}} = 0$. $ABC = 0$, $C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = 0$, $AA^{\mathrm{t}}ABB^{\mathrm{t}} = 0$.

(3) $ABC = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta+1 \\ \beta & \beta^2+1 \end{smallmatrix}\right)$, $C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ \beta+1 & \beta^2+1 \end{smallmatrix}\right)$, $AA^{\mathrm{t}}ABB^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta^2 & \beta^2+1 \\ \beta & \beta+1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 30.

(1) Für $A \in K^{n\times n}$ schreibe $A = (v_1, \dots, v_n)$ mit $v_i \in K^n$. Wähle für die erste Spalte einen Vektor $v_1 \in K^n \setminus 0$. Davon gibt es $q^n - 1$ Stück. Fixiere die erste Spalte.
Wähle für die zweite Spalte einen Vektor $v_2 \in K^n \setminus \langle v_1 \rangle$. Davon gibt es $q^n - q$ Stück. Fixiere auch die zweite Spalte.
Wähle für die dritte Spalte einen Vektor $v_3 \in K^n \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$. Davon gibt es $q^n - q^2$ Stück. Fixiere auch die dritte Spalte.
So fortfahrend erhält man schließlich eine reguläre Matrix. Insgesamt kann man

$$\#\,\mathrm{GL}_n(K) = (q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1}) = \prod_{i=1}^{n}(q^n - q^{n-i})$$

verschiedene reguläre Matrizen konstruieren.

(2) Es ist $\#\{A^k \mid k \geq 1\}$ endlich, d.h. es existieren $l, m \geq 1$ mit $l > m$ und $A^l = A^m$. Dann ist $A^{l-m} = A^0 = E$, da A regulär ist.

(3) (a) $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^3 = E$, die Ordnung von A ist 3.

(b) $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & \iota-1 \\ \iota-1 & -\iota-1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} -\iota-1 & -\iota+1 \\ -\iota+1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^4 = \left(\begin{smallmatrix} \iota+1 & -\iota \\ -\iota & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^5 = E$, die Ordnung von A ist 5.

(c) $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^5 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^6 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^7 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^8 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^9 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^{10} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^{11} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^{12} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^{13} = E$, die Ordnung von A ist 13.

(d) Z.B. folgt mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha+1 \\ \alpha & \alpha+1 \end{smallmatrix}\right)$, daß $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha+1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha+1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A^4 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha+1 & \alpha+1 \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^5 = E$.
Sei $x \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$, dann ist $G_x := \{x^m \mid m \in \mathbf{Z}\} \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ eine Untergruppe mit $\#G_x =$ (Ordnung von x). Nach Aufgabe 4.(1) ist damit die Ordnung von x ein Teiler von $\#\,\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$. 5 ist aber kein Teiler von $6 = \#\,\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$, ein Element der Ordnung 5 existiert in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ also nicht.

Aufgabe 31.

(1) Induktionshypothese:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ & & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix} =: (a_{i,j}^{(n)})_{i,j}, \text{ d.h. } a_{i,j}^{(n)} = \binom{n}{j-i}\lambda^{n-(j-i)}.$$

Beachte, daß $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$ oder $k < 0$.
$n = 0$: $A^0 = E$.
$n \to (n+1)$: Es ist $a_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(n)} a_{k,j} = \sum_{k=i}^{j} a_{i,k}^{(n)} a_{k,j}$, da sowohl A^n als auch A obere Dreiecksmatrizen sind. Für $j \geq i$ folgt der Induktionsschluß

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(n+1)} &= \sum_{k=i}^{j} \binom{n}{k-i}\lambda^{n-(k-i)}\binom{1}{j-k}\lambda^{1-(j-k)} \\ &= \lambda^{n+1-(j-i)}(\binom{n}{j-i} + \binom{n}{j-i-1}) \\ &= \lambda^{n+1-(j-1)}\binom{n+1}{j-i}. \end{aligned}$$

(2) Es ist $\begin{pmatrix} a_{1,1}^2 + a_{1,2}a_{2,1} & a_{1,1}a_{1,2} + a_{1,2}a_{2,2} \\ a_{2,1}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1} & a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}^2 \end{pmatrix} - (a_{1,1} + a_{2,2})\left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right) + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Also ist $A(A-(a_{1,1}+a_{2,2})E) = (A-(a_{1,1}+a_{2,2})E)A = -(a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1})E$, und $B := -(a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1})^{-1}(A-(a_{1,1}+a_{2,2})E) = (a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1})^{-1}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$ ist das multiplikative Inverse zu A.

Aufgabe 32.

(1) Wähle z.B. die Standardbasen $\underline{v} = \underline{w} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ von $\mathbf{R}^2$, und $\underline{y} = (1)$ von $\mathbf{R}^1$.
$A(f)_{\underline{w},\underline{v}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A(g)_{\underline{y},\underline{w}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A(g \circ f)_{\underline{y},\underline{v}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
An den beschreibenden Matrizen liest man ab:
f ist bijektiv (da das Spaltentupel eine Basis von $\mathbf{R}^2$ ist). g ist nicht injektiv (da das Spaltentupel linear abhängig ist), aber surjektiv (da das Spaltentupel $\mathbf{R}^1$ erzeugt). $g \circ f$ ist nicht injektiv (da das Spaltentupel linear abhängig ist), aber surjektiv (da das Spaltentupel $\mathbf{R}^1$ erzeugt).

(2) Wähle z.B. die Standardbasen $\underline{v}$ von $\mathbf{C}^3$, $\underline{w}$ von $\mathbf{C}^4$ und $\underline{y}$ von $\mathbf{C}^2$.
$A(f)_{\underline{w},\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & i & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A(g)_{\underline{y},\underline{w}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $A(g \circ f)_{\underline{y},\underline{v}} = A(g)_{\underline{y},\underline{w}} A(f)_{\underline{w},\underline{v}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2+4i & 3 \\ i & -4+2i & 3i \end{smallmatrix}\right)$. An den beschreibenden Matrizen liest man ab:
f ist injektiv (da das Spaltentupel linear unabhängig ist), aber nicht surjektiv (da ein Tupel mit 3 Vektoren nicht erzeugend in $\mathbf{C}^4$ ist). g ist nicht injektiv (da das Spaltentupel linear abhängig ist), aber nicht surjektiv (da das Spaltentupel nicht erzeugend ist). $g \circ f$ ist mit der gleichen Begründung wie für g weder injektiv noch surjektiv.

(3) Wähle z.B. $\underline{v} = (1, \beta, \beta^2)$ als Basis von $\mathbf{F}_8$ über $\mathbf{F}_2$. Es ist $f(1) = 1$, $f(\beta) = \beta^2$ und $f(\beta^2) = \beta^4 = \beta + \beta^2$. $A(f)_{\underline{v},\underline{v}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. $A(f^2)_{\underline{v},\underline{v}} = (A(f)_{\underline{v},\underline{v}})^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
f und f^2 sind bijektiv, da die Spaltentupel jeweils eine Basis von $\mathbf{F}_2^3$ über $\mathbf{F}_2$ sind.

Aufgabe 33.

(1) Ist falsch, z.B. ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = A^2$, aber $A \notin \{0, E\}$.

(2) Ist richtig. Sei $A^{\mathrm{t}}A = 0$. Dann gilt insbesondere für den i-ten Eintrag ($i \in [1,n]$) auf der Diagonalen von $A^{\mathrm{t}}A$: $0 = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$. Da $a_{k,i} \in \mathbf{R}$, folgt $a_{k,i} = 0$ für $k \in [1,n]$. Also ist $A = 0$. Die Rückrichtung ist trivial.

(3) Ist falsch, z.B. gilt für $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, daß $A^{\mathrm{t}}A = 0$, aber $A \neq 0$.

(4) Ist richtig. Seien $l, m \in [1,n]$.
Definiere $D(l,m) \in K^{n\times n}$ mit $D(l,m) = (d_{i,j})_{i,j}$ mit $d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = l \text{ und } j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Für $i, j \in [1,n]$ ist
$AD(l,m) =: (c_{i,j})_{i,j}$ mit $c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,l} & \text{falls } j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, und
$D(l,m)A =: (\tilde{c}_{i,j})_{i,j}$ mit $\tilde{c}_{i,j} = \begin{cases} a_{m,j} & \text{falls } i = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Damit folgt $a_{i,j} = 0$ für $i \neq j$ und $a_{i,i} = a_{j,j}$ (setze $l = i$, $m = j$). Damit ist $A = \lambda E$ für ein $\lambda \in K$. Die Rückrichtung ist trivial.

(5) Ist richtig. Für $l, m \in [1,n]$ sei $D(l,m)$ wie in (4) definiert.
„$\Rightarrow$“ Sei $l \neq m$. Es ist $D(l,1)D(1,m) = D(l,m)$, aber $D(1,m)D(l,1) = 0$, und $f(D(l,m)) = 0$. Es ist $D(l,1)D(1,l) = D(l,l)$ und $D(1,l)D(l,1) = D(1,1)$. Damit folgt $f(D(1,1)) = f(D(l,l))$. Mit $\lambda := f(D(1,1))$ folgt

$$f(A) = \sum_{ij} a_{i,j} f(D(i,j)) = \sum_{i} a_{i,i} f(D(i,i)) = \lambda \operatorname{Tr}(A).$$

„$\Leftarrow$“: Man beachte $\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{l,k}b_{k,l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{l,k}a_{k,l} = \operatorname{Tr}(BA)$ für $B \in K^{n\times n}$.