Matthias Künzer

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Klausur I am 13.12.02 von 18 bis 21 Uhr, Hilfsmittel: 1 Blatt DIN A4.
Hörsaaleinteilung (nach Nachnamen sortiert): H22: A-Ho, H4/5: Hp-Ro, H3: Rp-Stro, H20: Strp-Z.

Aufgabe 29 (3*2 Punkte).
Berechne jeweils ABC, $C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ und $AA^{\mathrm{t}}ABB^{\mathrm{t}}$.

(1) $K = \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+i & 3i \\ -5i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & -3+2i & 2i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \\ 2+i & 1-2i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3i & -1 & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{F}_8$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta+1 \\ 0 & \beta^2+1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta \\ \beta+1 & \beta^2 & \beta^2+1 \\ \beta^2+\beta & \beta^2+\beta+1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 30 (1+1+4*1.5 Punkte).

(1) Sei K ein endlicher Körper mit $\#K = q$ Elementen, und sei $n \geq 1$. Berechne die Anzahl $\#\,\mathrm{GL}_n(K)$ der regulären Matrizen in $K^{n\times n}$.
(Hinweis: Wähle erste Spalte geeignet, wähle dann zweite Spalte geeignet, usw.)

(2) Sei K ein endlicher Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine reguläre Matrix. Zeige: $\exists k \geq 1$ mit $A^k = E$.

(3) Berechne jeweils die Ordnung von A.
  (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$.
  (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & \iota \\ \iota & \iota+1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_9)$.
  (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_3)$.
  (d) Gib ein Element der Ordnung 5 in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_4)$ an. Gibt es ein solches Element bereits in der Untergruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$?

Aufgabe 31 (2 Punkte). Sei K ein Körper.

(1) Für $n \geq 0$, $\lambda \in K$ und $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}$ berechne A^n. (Hinweis: Induktion.)

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Zeige: $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})E = 0$.
Gib im Falle $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ ein $B \in K^{2\times 2}$ mit $AB = BA = E$ an.
(B ist also das multiplikativ Inverse zu A).

Aufgabe 32 (3*2 Punkte).
Seien V, W und Y Vektorräume über einem Körper K und $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Y$ lineare Abbildungen. Gib in geeigneten Basen beschreibende Matrizen für f, g und $g \circ f$ an und spezifiziere jeweils, ob die Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(1) $K = \mathbf{R}$; $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1+\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$; $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$, $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \mapsto (\eta_1 - \eta_2)$.

(2) $K = \mathbf{C}$; $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^4$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1+2\xi_2+3\xi_3 \\ 4\xi_2 \\ -\xi_1+i\xi_2-2\xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$; $g : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^2$, $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_1+i\eta_2 \\ i\eta_1-\eta_2 \end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{F}_2$; $f : \mathbf{F}_8 \to \mathbf{F}_8, \xi \mapsto \xi^2$; $g = f$.

Aufgabe 33 (5 Punkte). Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Zeige, oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels.

(1) $A^2 = A \Leftrightarrow A \in \{0, E\}$.

(2) Sei $K = \mathbf{R}$. Entscheide: $A^{\mathrm{t}}A = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

(3) Wie (2), nur $K = \mathbf{C}$.

(4) ($AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$) $\Leftrightarrow$ ($\exists \lambda \in K$ mit $A = \lambda E$).

(5) Sei $f : K^{n\times n} \to K$ linear und bezeichne $\mathrm{Tr}((c_{i,j})_{i,j}) := \sum_{i=1}^{n} c_{i,i}$ die Spur einer quadratischen Matrix $(c_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$. Entscheide:
($f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in K^{n\times n}$) $\Leftrightarrow$ ($\exists \lambda \in K$ mit $f = \lambda\,\mathrm{Tr}$).