

Aufgabe 25.

- (1) Linear. Für $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ und $x, y \in \mathbf{R}^2$ mit $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$f(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} (\lambda \xi_1 + \mu \eta_1) + (\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) \\ 0 \\ -(\lambda \xi_1 + \mu \eta_1) - (\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 + \lambda \xi_2 \\ 0 \\ -\lambda \xi_1 - \lambda \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \eta_1 + \mu \eta_2 \\ 0 \\ -\mu \eta_1 - \mu \eta_2 \end{pmatrix} = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
- (2) Nicht linear, da z.B. $f(2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
- (3) Linear. Für $\lambda, \mu \in \mathbf{F}_2$ und $x, y \in \mathbf{F}_8^3$ mit $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ gilt

$$f(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} \lambda(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \mu(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \\ (\lambda \xi_1 + \lambda^2 \xi_2 + \lambda^4 \xi_3) + (\mu \eta_1 + \mu^2 \eta_2 + \mu^4 \eta_3) \\ \lambda(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \mu(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \mu(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \\ \lambda(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \mu(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \\ \lambda(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \mu(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \end{pmatrix} = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
- (4) Linear. Für $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ und $g(X), h(X) \in \mathbf{C}[X]$ gilt

$$\varphi(\lambda g(X) + \mu h(X)) = ((\lambda g + \mu h)(X^3) + (\lambda g + \mu h)'(X) + X^3(\lambda g + \mu h)(X) - (\lambda g + \mu h)(1)) = (\lambda g(X^3) + \mu h(X^3)) + (\lambda g'(X) + \mu h'(X)) + (\lambda X^3 g(X) + \mu X^3 h(X)) - (\lambda g(1) + \mu h(1)) = \lambda \varphi(g(X)) + \mu \varphi(h(X)).$$
- (5) Nicht linear, da z.B. $\varphi(\iota X) = \iota^3 X^3 - \iota X^3 = \iota X^3 \neq 0 = \iota \varphi(X)$.
- (6) Linear. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $x_1, x_2 \in T \oplus U$. Die eindeutigen Zerlegungen von x_1 und x_2 seien $x_1 = t_1 + u_1$ und $x_2 = t_2 + u_2$ mit $t_1, t_2 \in T$ und $u_1, u_2 \in U$. Da die Summe $T \oplus U$ direkt ist, ist $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) + (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)$ die eindeutige diesbezügliche Zerlegung von $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Damit folgt $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f((\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) + (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)) = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

Aufgabe 26.

- (1) Eine Basis von Kern f ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Eine Basis von Im f ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Die Abbildung f ist weder injektiv noch surjektiv.
- (2) Da Kern $f = 0$, ist f injektiv und das leere Tupel $()$ Basis von Kern f . Nach der Dimensionsformel ist $\dim \text{Im } f = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} - \dim \text{Kern } f = 2$, also ist $(1, i)$ eine Basis von Im f und f ist surjektiv. Damit ist f ein Isomorphismus.
- (3) Aus $\xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\xi_i \in \mathbf{C}$ folgt $\xi_1 = -i\xi_3, \xi_2 = i\xi_3$. Also ist z.B. $(\begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis von Kern f , und f ist nicht injektiv.
Da $\dim \text{Im } f = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^3 - \dim \text{Kern } f = 2 = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^2$, ist f surjektiv, und eine Basis von Im f ist bspw. $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.
- (4) Aus $\xi_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\xi_i \in \mathbf{F}_5$ folgt $\xi_3 = 0$ und $\xi_1 = 2\xi_2$. Also ist z.B. $(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von Kern f , und f ist nicht injektiv.
Eine Basis von Im $f = \langle f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ist z.B. $(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
Da $\dim \text{Im } f = 2 < 3 = \dim_{\mathbf{F}_5} \mathbf{F}_5^3$, ist f nicht surjektiv.
- (5) Aus $\xi_1 \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\xi_i \in \mathbf{F}_4$ folgt $\xi_1 = \alpha\xi_3$ und $\xi_2 = 0$. Also ist z.B. $(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis von Kern f und f ist nicht injektiv.
Es ist $\dim \text{Im } f = \dim_{\mathbf{F}_4} \mathbf{F}_4^3 - \dim \text{Kern } f = 2 = \dim_{\mathbf{F}_4} \mathbf{F}_4^2$. Also ist f surjektiv und bspw. $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von Im f .
- (6) Es ist $(1, X)$ eine Basis von $\mathbf{F}_2[X]/X^2\mathbf{F}_2[X]$. Da $(f(1), f(X)) = (1, 0)$, und $(1, 0)$ linear abhängig und nicht erzeugend ist, ist f weder injektiv noch surjektiv. Eine Basis von Kern f ist (X) , eine Basis von Im f ist (1) .

Aufgabe 27.

- (1) Ist richtig. Ist $x \in \text{Kern } f$, so ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$, also $x \in \text{Kern}(g \circ f)$.
- (2) Ist richtig. Es ist $\dim \text{Im } g = \dim W$ und $\dim \text{Im } f = \dim \text{Im}(g \circ f)$, wie man aus der Injektivität von g ersieht.
- (3) Ist richtig. Betrachte die auf Im f eingeschränkte Abbildung $g' : \text{Im } f \rightarrow Y, w \mapsto g(w)$.
Es ist $\text{Kern } g' = \{w \in \text{Im } f \mid g(w) = 0\} = \text{Kern } g \cap \text{Im } f$ und $\text{Im } g' = \{g(w) \mid w \in \text{Im } f\} = \text{Im}(g \circ f)$.
Für g' gilt $\dim \text{Im } f = \dim \text{Kern } g' + \dim \text{Im } g' = \dim(\text{Kern } g \cap \text{Im } f) + \dim \text{Im}(g \circ f)$.

Für $g \circ f$ und f haben wir $\dim V = \dim \text{Kern}(g \circ f) + \dim \text{Im}(g \circ f) = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Im } f$. Zusammengesetzt ergibt sich $\dim(\text{Kern } g \cap \text{Im } f) + \dim \text{Kern } f = \dim \text{Kern}(g \circ f)$.

- (4) Ist falsch. Seien $K = V = W = Y = \mathbf{R}$ und f und g jeweils die Nullabbildung $x \mapsto 0$. Dann ist $\dim(\text{Im}(g \circ f)) + \dim W = 0 + 1 \neq 0 + 0 = \dim \text{Im } f + \dim \text{Im } g$.
- (5) Ist richtig. Wegen $x = f(x) + (x - f(x))$ und $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$ ist $V = \text{Kern } f + \text{Im } f$. Ist $y \in \text{Kern } f \cap \text{Im } f$, so schreiben wir $y = f(z)$ für ein $z \in V$ und erhalten $y = f(z) = f^2(z) = f(y) = 0$.

Aufgabe 28.

- (1) (a) Nachrechnen des Untervektorraumkriteriums: $0 \in f^{-1}(U)$, da $f(0) = 0 \in U \leq V$. Mit $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in f^{-1}(U)$ gilt $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \in U$ nach Voraussetzung und damit $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(U)$.
- (b) Betrachte die auf $f^{-1}(U)$ eingeschränkte Abbildung $f' : f^{-1}(U) \rightarrow W, x \mapsto f(x)$. Für f' gilt $\dim f^{-1}(U) = \dim \text{Im } f' + \dim \text{Kern } f' = \dim((\text{Im } f) \cap U) + \dim \text{Kern } f$, da $\text{Kern } f \subseteq f^{-1}(U)$. Mit der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt schließlich

$$\begin{aligned} \dim((\text{Im } f) + U) &= \dim U + \dim \text{Im } f - \dim((\text{Im } f) \cap U) \\ &= \dim U + \underbrace{\dim \text{Im } f + \dim \text{Kern } f}_{=\dim V} - \dim f^{-1}(U). \end{aligned}$$

- (2) (a) Man setzt z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (b) Man ergänzt $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ zu einer Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbf{F}_8^3$. Man

setzt z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Es gilt dann $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta^2 + \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.)

- (3) Sei $\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right)$ linear abhängig. Ohne Einschränkung gelte $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein $\mu \in K$. Es ist $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = -\mu \eta_1 \eta_2 + \mu \eta_2 \eta_1 = 0$.

Umgekehrt, sei nun $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$ vorausgesetzt. Es ist $\eta_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \xi_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$. Dies zeigt die lineare Abhängigkeit, falls $\eta_1 \neq 0$ oder $\xi_1 \neq 0$. Falls $\eta_1 = \xi_1 = 0$, so ist $\eta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$. Dies zeigt die lineare Abhängigkeit, falls $\eta_2 \neq 0$ oder $\xi_2 \neq 0$. Falls $\eta_2 = \xi_2 = 0$, so ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ebenfalls linear abhängig.

- (4) Seien $\mu_i \in K$. Gilt die linke Seite, so hat $\sum_{i=1}^n \mu_i (b - a_i) = 0$ eine nichttriviale Lösung, d.h. $(\sum_{i=1}^n \mu_i) (\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$. Da $(a_1, \dots, a_n)$ linear unabhängig ist, ist $(\sum_{i=1}^n \mu_i) \lambda_i = \mu_i$ für alle $i \in [1, n]$, woraus $(\sum_{i=1}^n \mu_i) (\sum_{i=1}^n \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i$ folgt. Wäre $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$, so wäre $0 = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$ und somit $\mu_i = 0$ für alle $i \in [1, n]$. Dies ist nicht der Fall, und wir erhalten $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Umgekehrt, ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, so ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i (b - a_i) = b - \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$ eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors. Also ist $(b - a_1, \dots, b - a_n)$ linear abhängig.