

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 25 (6 Punkte). Seien V und W Vektorräume über einem Körper K . Entscheide, ob die Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ (bzw. $V \xrightarrow{\varphi} W$) linear ist. Begründe.

- (1) $K = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ 0 \\ -\xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}$.
- (2) $K = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2^2 + \xi_3^4 \end{pmatrix}$.
- (3) $K = \mathbf{F}_2$, $f : \mathbf{F}_8^3 \rightarrow \mathbf{F}_8^2$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2^2 + \xi_3^4 \end{pmatrix}$.
- (4) $K = \mathbf{C}$, $\varphi : \mathbf{C}[X] \rightarrow \mathbf{C}[X]$, $g(X) \mapsto g(X^3) + g'(X) + X^3 g(X) - g(1)$.
- (5) $K = \mathbf{F}_9$, $\varphi : \mathbf{F}_9[X] \rightarrow \mathbf{F}_9[X]$, $g(X) \mapsto g(X)^3 - g(X^3)$.
- (6) K beliebig, $T \leq V$, $U \leq V$ mit $T \cap U = 0$, $f : T \oplus U \rightarrow T$, $(t + u) \mapsto t$, wobei $t \in T$ und $u \in U$.

Aufgabe 26 (6 * 1.5 Punkte). Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $V \xrightarrow{f} W$ eine lineare Abbildung. Gib eine Basis von Kern f und eine Basis von Im f an. Entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Begründe.

- (1) $K = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ -\xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}$.
- (2) $K = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{C}^1 \rightarrow \mathbf{C}^1$, $(\xi) \mapsto (i\xi)$.
- (3) $K = \mathbf{C}$, $f : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^2$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + i\xi_3 \\ \xi_3 + i\xi_2 \end{pmatrix}$.
- (4) $K = \mathbf{F}_5$, $f : \mathbf{F}_5^3 \rightarrow \mathbf{F}_5^3$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 + 3\xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$.
- (5) $K = \mathbf{F}_4$, $f : \mathbf{F}_4^3 \rightarrow \mathbf{F}_4^2$, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\alpha+1)\xi_1 + \alpha\xi_2 + \xi_3 \\ \alpha\xi_1 + (\alpha+1)\xi_3 \end{pmatrix}$.
- (6) $K = \mathbf{F}_2$, $f : \mathbf{F}_2[X]/X^2\mathbf{F}_2[X] \rightarrow \mathbf{F}_2[X]/X^2\mathbf{F}_2[X]$, $g(X) \mapsto g(X)^2$.

Aufgabe 27 (5 Punkte). Seien V , W und Y Vektorräume über einem Körper K . Seien die Abbildungen $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow Y$ linear. Zeige, oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels.

- (1) Kern $f \subseteq \text{Kern}(g \circ f)$.
- (2) Sei g injektiv. Entscheide: $\dim W + \dim \text{Im}(g \circ f) = \dim \text{Im } f + \dim \text{Im } g$.
- (3) $\dim(\text{Kern } g \cap \text{Im } f) + \dim \text{Kern } f = \dim \text{Kern}(g \circ f)$.
- (4) $\dim(\text{Im}(g \circ f)) + \dim W = \dim \text{Im } f + \dim \text{Im } g$.
- (5) Sei $V = W$ und $f^2 := f \circ f$. Entscheide: $f^2 = f \Rightarrow V = \text{Kern } f \oplus \text{Im } f$.

Aufgabe 28 (2+2+1+1 Punkte).

- (1) Seien V und W Vektorräume über einem Körper K , $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $U \leq W$ ein Untervektorraum von W . Zeige:
 - (a) $f^{-1}(U) \leq V$ ist Untervektorraum von V .
 - (b) $\dim V + \dim U = \dim f^{-1}(U) + \dim(\text{Im } f + U)$.
- (2) Gib jeweils eine lineare Abbildung f so an, daß
 - (a) $K = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ mit $\text{Im } f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$;
 - (b) $K = \mathbf{F}_8$, $f : \mathbf{F}_8^4 \rightarrow \mathbf{F}_8^3$ mit $\text{Kern } f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta+1 \\ \beta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
- (3) Sei K ein Körper, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in K^2$. Zeige: $(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix})$ linear abhängig $\Leftrightarrow \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$.
- (4) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Sei $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in V$ linear unabhängig und sei $b := \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ mit $\lambda_i \in K$. Zeige: $(b - a_1, \dots, b - a_n)$ linear abhängig $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.