

Aufgabe 20.

- (1) Es ist $-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{R}$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Damit ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$. Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, da die Gleichung $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{R}$ keine Lösung hat. Also ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine (ergänzte) Basis von $\mathbf{R}^3$.
- (2) Es sind $\begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Aus $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{C}$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Damit ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix})$ eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$, und $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ ist wegen linearer Unabhängigkeit eine Basis von $\mathbf{C}^4$.
- (3) Aus $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ 0 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{F}_4$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Da $\dim_{\mathbf{F}_4} \mathbf{F}_4^3 = 3$, ist $\underline{x}$ sowohl Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ als auch von $\mathbf{F}_4^3$.
- (4) Es ist $(\beta+1) + (\beta^2 + \beta) = \beta^2 + 1$. Aus $\lambda_1(\beta+1) + \lambda_2(\beta^2 + \beta) = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbf{F}_2$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also ist $(\beta+1, \beta^2 + \beta)$ eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$. Es ist $(1, \beta, \beta^2)$ eine Basis von $\mathbf{F}_8$ über $\mathbf{F}_2$ (jedes $v \in \mathbf{F}_8$ kann eindeutig als $v = \lambda_1 + \lambda_2\beta + \lambda_3\beta^2$ mit $\lambda_i \in \mathbf{F}_2$ dargestellt werden) und es ist $1 \notin \langle \underline{x} \rangle$, also ist $(1, \beta+1, \beta^2 + \beta)$ eine (ergänzte) Basis von $\mathbf{F}_8$ über $\mathbf{F}_2$.

Aufgabe 21.

- (1) (a) Nur der Nullraum hat Dimension 0, also ist die Anzahl 1.
(b) $U \leq \mathbf{R}^{17}$ und $\dim U = 17 = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{17}$ impliziert $U = \mathbf{R}^{17}$, also ist die Anzahl 1.
- (2) Die eindimensionalen Untervektorräume sind gegeben durch $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Die Anzahl ist 3.
- (3) Es ist $\#(\mathbf{F}_5^3 \setminus \{0\}) = 124$. Das Erzeugnis eines dieser Vektoren hat Dimension eins und enthält jeweils 4 vom Nullvektor verschiedene Vektoren. Damit ist die Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume $\frac{124}{4} = 31$.
- (4) Sei die minimale Position, an der der entsprechende Eintrag nicht verschwindet, als

$$\text{mp} : \mathbf{F}_p^4 \setminus \{0\} \rightarrow [1, 4], \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \mapsto \min\{i \in [1, 4] \mid \xi_i \neq 0\}$$

definiert.

Wir wollen einem Untervektorraum U ein Basistupel (x_1, x_2) von U zuordnen. Diese Abbildung ist dann wegen $U = \langle x_1, x_2 \rangle$ injektiv.

Sei $x'_1 \in U \setminus \{0\}$ mit $\text{mp}(x'_1)$ minimal. Wir normieren den Eintrag von x'_1 an Position $\text{mp}(x'_1)$ mit skalarer Multiplikation zu 1.

Sei $x_2 \in U \setminus \{0\}$ mit $\text{mp}(x_2) > \text{mp}(x'_1)$, und damit minimal. Ein solches x_2 existiert aus folgendem Grund: Sei $x'_2 \in U \setminus \langle x'_1 \rangle$ mit $\text{mp}(x'_2)$ minimal. Nach Wahl von x'_1 ist $\text{mp}(x'_1) \leq \text{mp}(x'_2)$. Ist $\text{mp}(x'_1) < \text{mp}(x'_2)$, so wählen wir $x_2 := x'_2$. Ist $\text{mp}(x'_1) = \text{mp}(x'_2)$, so bilden wir $x_2 := x'_2 - \lambda x'_1$ so, daß $\text{mp}(x'_1) < \text{mp}(x_2)$. Wir normieren auch x_2 an Position $\text{mp}(x_2)$ zu 1.

Sei nun $x_1 = x'_1 - \mu x_2$ so, daß x_1 an Position $\text{mp}(x_2)$ den Eintrag 0 hat. Es ist $U = \langle x_1, x_2 \rangle$, da wegen $x_2 \notin \langle x_1 \rangle$ das Tupel (x_1, x_2) linear unabhängig ist.

Um damit eine Abbildung

$$\{U \leq V \mid \dim U = 2\} \rightarrow \mathbf{F}_p^4 \times \mathbf{F}_p^4, \quad U \mapsto (x_1, x_2)$$

unabhängig von den getroffenen Wahlen konstruiert zu haben, bleibt zu zeigen, daß für $y_1, y_2 \in U$ mit $\text{mp}(y_1) < \text{mp}(y_2)$ und y_1 bei Position $\text{mp}(y_1)$ zu 1 normiert, und y_1 bei Position $\text{mp}(y_2)$ eine Null, und y_2 bei Position $\text{mp}(y_2)$ zu 1 normiert, bereits $y_1 = x_1$ und $y_2 = x_2$ gilt.

Wegen $y_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ ist $y_1 = \lambda x_1 + \mu x_2$. Wäre $\lambda = 0$, so könnte kein y_2 mit $\text{mp}(y_1) < \text{mp}(y_2)$ in $\langle x_1, x_2 \rangle$ existieren. Da y_1 bei $\text{mp}(y_1)$ normiert ist, ist $\lambda = 1$. Wegen $y_2 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ ist $y_2 = \lambda' x_1 + \mu' x_2$. Da $\text{mp}(y_2) > \text{mp}(y_1) = \text{mp}(x_1)$, ist $\lambda' = 0$. Da y_2 bei $\text{mp}(y_2)$ normiert ist, ist $\mu' = 1$. Zu zeigen bleibt $\mu = 0$. Dies folgt daraus, daß y_1 bei $\text{mp}(y_2) = \text{mp}(x_2)$ den Eintrag 0 hat.

Man hat folgende Arten von Basisvektoren, wobei der Stern $*$ für ein beliebiges Element aus $\mathbf{F}_p$ steht. Die Auflistung ist über die Position der Einsen indiziert. In der zweiten Zeile steht die Anzahl derartiger Basistupel.

$$\begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ 0 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ p^4 & p^3 & p^2 & p^2 & p & 1 \end{array}$$

Die Anzahl der zweidimensionalen Untervektorräume von $\mathbf{F}_p^4$ ist $p^4 + p^3 + 2p^2 + p + 1$.

Aufgabe 22.

- (1) Ist falsch. $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $T = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $U = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Dann ist $(T + U) \cap W = W$, aber $(T \cap W) + (U \cap W) = 0 + 0 = 0$ der Nullraum.
- (2) Ist falsch. Mit gleicher Wahl wie in (1) ist $(T \cap U) + W = W$, aber $(T + W) \cap (U + W) = \mathbf{R}^2 \cap \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2$.
- (3) Ist richtig. Ist $x \in (T \cap U) + W$, dann ist $x = z + w$ mit $z \in T \cap U$, $w \in W \subseteq T$. Damit folgt insbesondere $x \in T$. Da $x = z + w \in U + W$, ist insgesamt $x \in T \cap (U + W)$. Umgekehrt, ist $x \in T \cap (U + W)$, dann ist $x \in T$ und $x = z + w$ mit $z \in U$ und $w \in W \subseteq T$. Da $x, w \in T$, folgt $z \in T$ und damit $x = z + w \in (T \cap U) + W$.

Aufgabe 23.

- (1) Da $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig ist, ist es eine Basis von T , und $\dim T = 2$.
Es ist $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wegen linearer Unabhängigkeit ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von U , und $\dim U = 2$.
Um Vektoren von $T \cap U$ auszurechnen, ist $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{R}$ zu lösen. Man erhält schrittweise $\lambda_2 = \lambda_4$, $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_4$. Alle Vektoren in $T \cap U$ haben dann die Form $\lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_4 \in \mathbf{R}$, also ist $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $T \cap U$, und $\dim(T \cap U) = 1$.
Mit der Dimensionsformel erhält man $\dim(T + U) = 3$; die Summe $T + U$ ist nicht direkt, da $T \cap U \neq 0$.
- (2) Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{F}_2$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von T , und $\dim T = 3$.
Aus $\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{F}_2$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von U , und $\dim U = 3$.
Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T \cap U$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in T \cap U$, d.h. $T \cap U \supseteq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$, gilt $T \cap U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
Wegen linearer Unabhängigkeit ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $T \cap U$, und $\dim(T \cap U) = 2$.
Mit der Dimensionsformel erhält man $\dim(T + U) = 4$; die Summe $T + U$ ist nicht direkt, da $T \cap U \neq 0$.
- (3) Da $(\iota - 1) \begin{pmatrix} \iota - 1 \\ 1 \\ -\iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota - 1 \\ \iota - 1 \\ \iota + 1 \end{pmatrix}$, ist $\left(\begin{pmatrix} \iota - 1 \\ 1 \\ -\iota \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von T und $\dim T = 1$.
Wegen linearer Unabhängigkeit ist $\left(\begin{pmatrix} \iota \\ 0 \\ -\iota + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \iota \\ 0 \\ \iota \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von U und $\dim U = 2$.
Um Vektoren von $T \cap U$ auszurechnen, ist $\lambda_1 \begin{pmatrix} \iota - 1 \\ 1 \\ -\iota \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \iota \\ 0 \\ -\iota + 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \iota \\ 0 \\ \iota \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbf{F}_9$ zu lösen. Es folgt $\lambda_1 = 0$ (und dann auch $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$), d.h. nur der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt in $T \cap U$. Die Basis von $T \cap U$ ist das leere Tupel $()$, und $\dim(T \cap U) = 0$.
Mit der Dimensionsformel erhält man $\dim(T + U) = 3$; die Summe $T + U = T \oplus U$ ist direkt, da $T \cap U = 0$.

Aufgabe 24.

- (1) Nachrechnen des Untervektorraumkriteriums:
Seien $f_1(X), f_2(X) \in T$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$. Dann ist $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(X) = \lambda_1 f_1(X) + \lambda_2 f_2(X) = \lambda_1 f_1(iX) + \lambda_2 f_2(iX) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(iX)$, also $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(X) \in T$.
Seien $g_1(X), g_2(X) \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$. Dann ist $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(X) = \lambda_1 g_1(X) + \lambda_2 g_2(X) = \lambda_1 i g_1(iX) + \lambda_2 i g_2(iX) = i(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(iX)$, also $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(X) \in U$.
- (2) Ist $h(X) \in T \cap U$, dann gilt $h(X) = ih(iX) = ih(X)$, wobei das linke Gleichheitszeichen aus $h(X) \in U$ und das rechte aus $h(X) \in T$ folgt. $h(X) = ih(X)$ impliziert nun $h(X) = 0$. Also ist $T \cap U$ der Nullraum und damit ist $T + U$ direkt.
- (3) Es ist $T = \{\sum_{j \geq 0} a_j X^j \in \mathbf{C}[X] \mid \sum_{j \geq 0} a_j X^j = \sum_{j \geq 0} a_j i^j X^j\} = \{\sum_{j \geq 0} b_j X^{4j} \mid b_j \in \mathbf{C}\}$ und genauso $U = \{\sum_{j \geq 0} c_j X^{4j+3} \mid c_j \in \mathbf{C}\}$. Damit ist z.B. $h(X) = X \notin T \oplus U$.