

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 20 (4 * 1.5 Punkte).

Sei jeweils V ein Vektorraum über einem Körper K , sei $\underline{x}$ ein Tupel von Vektoren in V . Wähle eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ aus und ergänze zu einer Basis von V .

- (1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
- (2) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^4$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i-1 \\ i+1 \end{pmatrix} \right)$.
- (3) $K = \mathbf{F}_4$, $V = \mathbf{F}_4^3$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ 0 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$.
- (4) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_8$, $\underline{x} = (\beta + 1, \beta^2 + \beta, \beta^2 + 1)$.

Aufgabe 21 (4 Punkte).

Sei jeweils V ein Vektorraum über einem Körper K . Gib die Anzahl $\#\{U \leq V \mid \dim U = m\}$ der m -dimensionalen Untervektorräume von V an.

- (1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^{17}$,
 - (a) $m = 0$,
 - (b) $m = 17$.
- (2) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_2^2$, $m = 1$.
- (3) $K = \mathbf{F}_5$, $V = \mathbf{F}_5^3$, $m = 1$.
- (4) Sei p eine Primzahl. $K = \mathbf{F}_p$, $V = \mathbf{F}_p^4$, $m = 2$.

Aufgabe 22 (3 Punkte).

Sei jeweils V ein Vektorraum über einem Körper K , seien T, U, W Untervektorräume von V . Zeige, oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels.

- (1) $(T + U) \cap W = (T \cap W) + (U \cap W)$.
- (2) $(T \cap U) + W = (T + W) \cap (U + W)$.
- (3) $(T \cap U) + W = T \cap (U + W)$, falls $W \subseteq T$.

Aufgabe 23 (9 Punkte).

Sei jeweils V ein Vektorraum über einem Körper K , seien T, U Untervektorräume von V . Bestimme jeweils eine Basis und die Dimensionen von T, U und $T \cap U$. Gib die Dimension von $T + U$ an. Entscheide, ob die Summe $T + U$ direkt ist.

- (1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^4$, $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
- (2) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_2^5$, $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
- (3) $K = \mathbf{F}_9$, $V = \mathbf{F}_9^4$, $T = \left\langle \begin{pmatrix} \iota-1 \\ 1 \\ 1 \\ -\iota \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \iota \\ \iota-1 \\ -1 \\ \iota+1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} \iota \\ 0 \\ 0 \\ -\iota+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \iota \\ 0 \\ 0 \\ \iota \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 24 (3 Punkte).

Sei $V = \mathbf{C}[X]$ aufgefaßt als Vektorraum über $K = \mathbf{C}$. Für ein Polynom $f(X) = \sum_{j \geq 0} a_j X^j \in \mathbf{C}[X]$ sei $f(iX) := \sum_{j \geq 0} a_j (iX)^j \in \mathbf{C}[X]$.

$$\begin{aligned} T &:= \{f(X) \in \mathbf{C}[X] \mid f(X) = f(iX)\} \\ U &:= \{g(X) \in \mathbf{C}[X] \mid g(X) = ig(iX)\} \end{aligned}$$

- (1) Zeige: T und U sind Untervektorräume von V .
- (2) Zeige: Die Summe $T + U$ ist direkt, d.h. $T + U = T \oplus U$.
- (3) Gib ein $h(X) \in \mathbf{C}[X] \setminus (T \oplus U)$ an.