

Aufgabe 16.

- (1) Seien $f, g, h \in K^M$, $\lambda, \mu \in K$.
 (V 1): $(V, +)$ ist abelsche Gruppe. (G 1): Für alle $m \in M$ gilt $((f+g)+h)(m) = (f+g)(m) + h(m) = f(m) + g(m) + h(m) = \dots = (f+(g+h))(m)$, also $(f+g)+h = f+(g+h)$. (G 2): Die Abbildung $0 : M \rightarrow K, m \mapsto 0$ ist neutrales Element. (G 3): Zu f ist die Abbildung $(-f) : M \rightarrow K, m \mapsto -f(m)$ invers. (G 4): Für alle $m \in M$ gilt $(f+g)(m) = f(m) + g(m) = \dots = (g+f)(m)$, also $f+g = g+f$.
 (V 2): Für alle $m \in M$ gilt $(1 \cdot f)(m) = 1 \cdot f(m) = f(m)$, also $1 \cdot f = f$.
 (V 3): Für alle $m \in M$ gilt $(\lambda \cdot (\mu \cdot f))(m) = \lambda \cdot (\mu \cdot f)(m) = \lambda \mu \cdot f(m) = ((\lambda \mu) \cdot f)(m)$, also $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda \mu) \cdot f$.
 (V 4): Für alle $m \in M$ gilt $((\lambda + \mu) \cdot f)(m) = \lambda \cdot f(m) + \mu \cdot f(m) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(m)$, also $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$.
 (V 5): Für alle $m \in M$ gilt $(\lambda \cdot (f+g))(m) = \lambda(f+g)(m) = \lambda f(m) + \lambda g(m) = (\lambda \cdot f)(m) + (\lambda \cdot g)(m)$, also $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.
 (2) (a) Induktion nach n .
 $n = 0$. (f_0) ist linear unabhängig.
 $n - 1 \rightarrow n$. Zu zeigen ist die lineare Unabhängigkeit von $(f_0, f_1, \dots, f_n)$. Ist also $0 = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n =: g_n$, so gilt $0 = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_n x^n = g_n(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Wähle $x_1, \dots, x_{n+1}$ paarweise verschieden in $\mathbf{R}$ (hier wird $\#\mathbf{R} = \infty$ verwendet). Polynomdivision liefert

$$g_n(x) = (x - x_1)g_{n-1}(x) + c$$

mit einer polynomialen Funktion g_{n-1} und $c \in \mathbf{R}$. Da $g_n(x_1) = 0$, folgt $c = 0$. Weiter ist $g_{n-1}(x_2) = \dots = g_{n-1}(x_{n+1}) = 0$. Mit g_{n-1} und x_2 wird dieses Verfahren wiederholt und man erhält

$$g_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)g_{n-2}(x)$$

mit $g_{n-2}(x_3) = \dots = g_{n-2}(x_{n+1}) = 0$. Iteriert man das Verfahren, erhält man schließlich

$$g_n(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \lambda_n.$$

Da $g_n(x_{n+1}) = 0$, folgt $\lambda_n = 0$.

Damit gilt $0 = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1}$, und mit der Induktionsvoraussetzung folgt dann $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

- (b) Nach Aufgabe 15.(3).(b) gilt $x^p = x$ in $\mathbf{F}_p$. Somit ist $f_p - f_1 = 0$ eine nichttriviale Linearkombination der Nullfunktion.
 (3) Nach (2).(a) ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ das Tupel $(f_0, \dots, f_n)$ linear unabhängig, d.h. die Länge eines linear unabhängigen Tupels ist nicht beschränkt. Also ist $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ unendlichdimensional (über $\mathbf{R}$).
 (4) Definiere für $i \in [1, n]$ die Funktionen $e_i : [1, n] \rightarrow K, j \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
 Ist $f \in K^{[1, n]}$, so gilt $f = \sum_{i=1}^n f(i) e_i$. Diese Darstellung ist eindeutig, wie man durch Einsetzen von $j \in [1, n]$ sieht. Damit ist $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von $K^{[1, n]}$ über K .

Aufgabe 17.

- (1) Linear abhängig, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (2) Linear unabhängig, da $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ notwendig $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ liefert.
- (3) Linear abhängig, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (4) Linear abhängig, da $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix} - (1+i) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (5) Linear unabhängig, da $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ insbesondere $\lambda_1(1+i) + \lambda_2 = 0$ ergibt, woraus $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ folgt.
- (6) Linear abhängig, da $(\beta+1) \begin{pmatrix} \beta^2+\beta \\ 1 \\ \beta+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \beta+1 \\ \beta^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 18.

- (1) Da $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, gilt $y \in \langle \underline{x} \rangle$.
- (2) Da $\alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, gilt $y \in \langle \underline{x} \rangle$.
- (3) Die Gleichung $\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \iota \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \iota-1 \\ \iota \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \iota-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \iota \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{F}_9$ hat keine Lösung, da $-\lambda_1 + \iota\lambda_2 = 1$ und $\iota\lambda_1 + \lambda_2 = \iota$ implizieren, daß $0 = \iota(-\lambda_1 + \iota\lambda_2) + (\iota\lambda_1 + \lambda_2) = \iota \cdot 1 + \iota \neq 0$. Also ist $y \notin \langle \underline{x} \rangle$.
- (4) Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist $\langle \underline{x} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Die Gleichung $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{F}_7$ hat keine Lösung. Also ist $y \notin \langle \underline{x} \rangle$.

Aufgabe 19.

- (1) Ist richtig. Wegen $z \in \langle x, y \rangle$ gibt es $\lambda, \mu \in K$ mit $z - \lambda x - \mu y = 0$. Also ist (x, y, z) linear abhängig.
- (2) Ist falsch. Wähle z.B. $K = V = \mathbf{R}$, $x = y = 0$, $z = 1$.
- (3) Ist falsch. Wähle z.B. $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.