

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 16 (1+2+1+1 Punkte).

Seien eine Menge M und ein Körper K gegeben. Die Menge der Abbildungen von M nach K sei mit $K^M := \{f : M \rightarrow K\}$ bezeichnet. Für $f, g \in K^M$ und $\lambda \in K$ seien

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{f+g} K, & m &\mapsto (f+g)(m) := f(m) + g(m); \\ M &\xrightarrow{\lambda \cdot f} K, & m &\mapsto (\lambda \cdot f)(m) := \lambda \cdot f(m). \end{aligned}$$

- (1) Zeige: $(K^M, +, \cdot)$ ist Vektorraum über K .
- (2) Sei $f_i \in K^M$ definiert durch $f_i(x) = x^i$ (polynomiale Funktion zum Polynom X^i).
 - (a) Sei $M = K = \mathbf{R}$. Zeige: $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ ist linear unabhängig für jedes $n \geq 0$. (Hinweis: Nullstellen abspalten.)
 - (b) Sei p eine Primzahl und $M = K = \mathbf{F}_p$. Zeige: $(f_0, f_1, \dots, f_p)$ ist linear abhängig.
- (3) Zeige: $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ist unendlichdimensional über $\mathbf{R}$.
- (4) Sei $n \geq 1$. Sei $M = [1, n]$ und K ein beliebiger Körper. Gib eine Basis von $K^{[1, n]}$ über K an.

Aufgabe 17 (6 * 1.5 Punkte).

Sei jeweils V ein Vektorraum über einem Körper K . Entscheide, ob das jeweilige Tupel linear unabhängig ist. Begründe.

- (1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $((\frac{1}{2}), (\frac{2}{1}), (\frac{-1}{1}))$.
- (2) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $((\frac{1}{0}), (\frac{1}{1}), (\frac{0}{1}))$.
- (3) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_2^3$, $((\frac{1}{0}), (\frac{1}{1}), (\frac{0}{1}))$.
- (4) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^2$, $((\frac{1+i}{2i}), (\frac{1}{1+i}))$.
- (5) Wie (4), nur $K = \mathbf{R}$. (Vektorraum mit von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{R}$ eingeschränkten Skalaren.)
- (6) $K = \mathbf{F}_8$, $V = \mathbf{F}_8^3$, $((\frac{\beta^2+\beta}{1}), (\frac{1}{\beta+1}), (\frac{\beta+1}{\beta^2+1}))$.

Aufgabe 18 (4 * 1.5 Punkte).

Sei jeweils V ein Vektorraum über einem Körper K , sei $\underline{x}$ ein Tupel von Vektoren in V . Ist y im Erzeugnis von $\underline{x}$ enthalten? Begründe.

- (1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $\underline{x} = ((\frac{1}{2}), (\frac{2}{3}))$, $y = (\frac{1}{1})$.
- (2) $K = \mathbf{F}_4$, $V = \mathbf{F}_4^3$, $\underline{x} = ((\frac{\alpha}{\alpha+1}), (\frac{\alpha}{\alpha+1}))$, $y = (\frac{1}{\alpha})$.
- (3) $K = \mathbf{F}_9$, $V = \mathbf{F}_9^3$, $\underline{x} = ((\frac{0}{-1}), (\frac{\iota-1}{\iota}), (\frac{\iota-1}{0}))$, $y = (\frac{1}{\iota})$.
- (4) $K = \mathbf{F}_7$, $V = \mathbf{F}_7^4$, $\underline{x} = ((\frac{1}{0}), (\frac{1}{1}), (\frac{2}{1}), (\frac{0}{1}))$, $y = (\frac{1}{1})$.

Aufgabe 19 (3 Punkte).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Seien $x, y, z \in V$ Vektoren. Zeige, oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels.

- (1) $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle \Rightarrow (x, y, z)$ linear abhängig.
- (2) (x, y, z) linear abhängig $\Rightarrow z \in \langle x, y \rangle$.
- (3) (x, y) linear unabhängig, (y, z) linear unabhängig und (x, z) linear unabhängig $\Rightarrow (x, y, z)$ linear unabhängig.