Matthias Künzer, Marc Meister

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 13 (4 * 2 Punkte).

(1) Seien $b, c \in \mathbf{R}$. Zeige: Ist $b^2 - 4c < 0$, so ist $X^2 + bX + c \in \mathbf{R}[X]$ irreduzibel; ist $b^2 - 4c \geq 0$, so ist es nicht irreduzibel. Zeige: $\mathbf{C}[X]$ enthält keine irreduziblen Polynome von Grad 2.

(2) Finde alle irreduziblen Polynome von Grad ≤ 3 in $\mathbf{F}_2[X]$ und in $\mathbf{F}_3[X]$.

(3) Finde alle irreduziblen Polynome von Grad 4 in $\mathbf{F}_2[X]$.

(4) Definiere (wie im Skript) einen Körper mit 27 Elementen. Finde darin alle Nullstellen von $X^3 - X^2 + 1$.

Aufgabe 14 (*Euklidscher Algorithmus.* 1+1+3 Punkte).

Seien K ein Körper und $f_1(X), f_2(X) \in K[X]$ gegeben. Sei

$$I_{f_1,f_2} := \{f_1(X)s(X) + f_2(X)t(X) \mid s(X), t(X) \in K[X]\} \subseteq K[X]$$

das *von f_1 und f_2 erzeugte Ideal.*

(1) Mit Polynomdivision schreibt man

$$f_1(X) = f_2(X)u_1(X) + f_3(X)$$

mit $u_1(X), f_3(X) \in K[X]$, wobei $\deg(f_3) < \deg(f_2)$ oder $f_3(X) = 0$.
Zeige: $I_{f_1,f_2} = I_{f_2,f_3}$.

(2) Sei iterativ

$$f_i(X) = f_{i+1}(X)u_i(X) + f_{i+2}(X)$$

mit $u_i(X), f_{i+2}(X) \in K[X]$ wobei $\deg(f_{i+2}) < \deg(f_{i+1})$ oder $f_{i+2}(X) = 0$. Letzterenfalls breche die Iteration ab; sei k maximal mit $f_k(X) \neq 0$.
Zeige: Der Algorithmus terminiert, und es ist $I_{f_1,f_2} = I_{f_k,0} = f_k(X)K[X]$.

(3) Berechne mit (2) jeweils ein normiertes Polynom $h(X) \in K[X]$ so, daß $I_{f,g} = h(X)K[X]$ ist.
  (a) $K = \mathbf{R}$, $f(X) = X^5 + 2X^3 + X^2 + X + 1$, $g(X) = X^4 - 1$.
  (b) $K = \mathbf{F}_5$, $f(X) = X^8 - 1$, $g(X) = X^6 + 2X^4 + X^2 - 3$.
  (c) $K = \mathbf{F}_4$, $f(X) = X^3 + \alpha X^2 + X + \alpha$, $g(X) = X^2 + (\alpha + 1)$.

Aufgabe 15 (4 * 2 Punkte).

(1) Berechne
  (a) in $\mathbf{C}$: $(2+i)^4$, $(2i)^{12}$;
  (b) in $\mathbf{F}_4$: $(1+\alpha)^4$, $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$;
  (c) in $\mathbf{F}_8$: $(1 + \beta + \beta^2)\beta^2$, $\sum_{x \in \mathbf{F}_8} x$;
  (d) in $\mathbf{F}_9$: $(\iota - 1)^8$, $\prod_{x \in \mathbf{F}_9 \setminus \{0\}} x$.

(2) Welche der folgenden Ringe sind Körper? Begründung!
  (a) $\mathbf{Q}[X]/(X^2 - 2)\mathbf{Q}[X]$
  (b) $\mathbf{R}[X]/(X^2 - 1)\mathbf{R}[X]$
  (c) $\mathbf{F}_2[X]/(X^{12} + 1)\mathbf{F}_2[X]$
  (d) $\mathbf{F}_5[X]/(X^3 + X + 1)\mathbf{F}_5[X]$

(3) Zeige:
  (a) Ist $x + iy \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbf{R}$, so ist $(x+iy)(x-iy) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
  (b) Ist K ein endlicher Körper mit $\#K = q$ Elementen, so gilt für $x \in K \setminus \{0\} : x^{q-1} = 1$.

(4) Berechne mit (3):
  (a) $(1+i)^{-1} \in \mathbf{C}$,
  (b) $(1+\beta^2)^{-1} \in \mathbf{F}_8$,
  (c) $(\iota + 1)^{-1} \in \mathbf{F}_9$,
  (d) $(x + \alpha y)^{-1} \in \mathbf{F}_4$ mit $x, y \in \mathbf{F}_2$ und $x + \alpha y \neq 0$.