Matthias Künzer, Marc Meister

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 9 (5 Punkte). Sei M eine Menge. In Aufgabe 7.(3) wurde gezeigt, daß die symmetrische Differenz auf $\mathfrak{P}(M)$ eine abelsche Gruppe definiert. Im folgenden schreibe statt $A \cdot B$ nun

$$A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ mit } A, B \in \mathfrak{P}(M)$$

und entsprechend $0 := \emptyset$. Bezeichne $A \cap B$ die übliche Schnittmenge.

(1) Zeige, daß $(\mathfrak{P}(M), +, \cap)$ ein kommutativer Ring ist.
(2) Zeige: Der Ring $(\mathfrak{P}(M), +, \cap)$ ist ein Körper genau dann, wenn $\#M = 1$.
(3) Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige: $\mathfrak{P}(N) \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ist ein Ideal.
(4) Gib im Fall $M = \{a, b\}$, $N = \{a\}$ die Verknüpfungstafeln des Restklassenrings $(\mathfrak{P}(M)/\mathfrak{P}(N), +, \cap)$ an (eine für $(+)$ und eine für $(\cap)$).
(5) Sei $(R, +, \cdot)$ ein beliebiger Ring.
Zeige: Gilt $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$, so ist $(R, +, \cdot)$ kommutativ.

Aufgabe 10 (1+2+2+1 Punkte). Sei $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}, +, \cdot)$ der Restklassenring modulo 7.

(1) Gib eine Verknüpfungstafel für $(+)$ an.
(2) Gib eine Verknüpfungstafel für $(\cdot)$ an.
(3) Finde alle $x \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ mit

$$\mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \setminus \{0\} = \{x^m \mid m \in \mathbf{Z}\}.$$

(4) Zeige: Ist p eine Primzahl, so gilt $x^p - x \equiv_p 0$ für alle $x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
(Hinweis: $\{x^m \mid m \in \mathbf{Z}\}$ ist Untergruppe von $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$; wende Aufgabe 4.(1) an.)

Aufgabe 11 (1+2+2+2+1+1 Punkte). Sei $(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}, +, \cdot)$ der Restklassenring modulo 16.

(1) Berechne alle Potenzen $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$ von 3 in $\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$.
(2) Berechne die Lösungsmenge $\{x \in \mathbf{Z}/16\mathbf{Z} \mid 6 \cdot x \equiv_{16} 0\}$.
(3) Gib alle (bzgl. der Multiplikation) invertierbaren Elemente $x \in \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$ und deren Inversen an.
(4) Bestimme die Menge $\{x \in \mathbf{Z}/16\mathbf{Z} \mid x^3 + x + 2 \equiv_{16} 0\}$.
(5) Gib $\{x \in \mathbf{Z}/16\mathbf{Z} \mid 5 \cdot x \equiv_{16} 1\}$ an. Bestimme damit $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid 5 \cdot x + 16 \cdot y = 1\}$.
(6) Zeige: Eine ganze Zahl der Form $16k + 15$ mit $k \in \mathbf{Z}$ ist niemals die Summe aus 14 Biquadratzahlen. Eine Zahl $y \in \mathbf{Z}$ heißt hierbei Biquadratzahl, wenn es ein $x \in \mathbf{Z}$ mit $y = x^4$ gibt.

Aufgabe 12 (2 Punkte). Gegeben sei eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $(+)$ und $(\cdot)$. Seien für $(R, +, \cdot)$ zunächst *nur* die Axiome (R 1, 3, 4) vorausgesetzt.

(1) Zeige: Für $x \in R$ gilt $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.
(2) Zeige mit Hilfe von (1), daß $(R, +, \cdot)$ ein Körper ist.
(Hinweis: Es ist (R 2a) zu zeigen.)