

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 5 (4 * 2 Punkte). Gegeben sind

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5.$$

- (1) Gib σ , ρ , σ^{-1} , ρ^{-1} in Zykelschreibweise an.
- (2) Berechne $\sigma \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \sigma^2$, $\sigma^2 \circ \rho^{-1}$.
- (3) Berechne ε_σ , ε_ρ , $\varepsilon_{\sigma \circ \rho}$, $\varepsilon_{\rho^{-1} \circ \sigma^2}$, $\varepsilon_{\sigma^2 \circ \rho^{-1}}$.
- (4) Bestimme die Ordnung von σ und von ρ .

Aufgabe 6 (2+1+1+1 Punkte).

- (1) Gib eine Verknüpfungstafel für $\mathcal{S}_3$ an, d.h. eine Tabelle der Produkte aller möglicher Paare $(\rho, \sigma) \in \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$ in der Form:

$\circ$	...	σ	...
$\vdots$			
ρ		$\rho \circ \sigma$	
$\vdots$			

- (2) Gib für alle $\sigma \in \mathcal{S}_3$ das Signum ε_σ und die Ordnung an.
- (3) Gib alle 6 Untergruppen von $\mathcal{S}_3$ an.
- (4) Sei $\text{Aut}(\mathcal{S}_3)$ die Gruppe der bijektiven Gruppenmorphisamen von $\mathcal{S}_3$ nach $\mathcal{S}_3$, mit der Komposition als Verknüpfung. Betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 &\xrightarrow{g} \text{Aut}(\mathcal{S}_3) \\ \sigma &\mapsto g_\sigma \text{ mit } g_\sigma : \mathcal{S}_3 \rightarrow \mathcal{S}_3, \rho \mapsto \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Zeige: g ist Gruppenmorphimus, g ist injektiv, g ist surjektiv.

(Hinweis für surjektiv: Ist $a \in \text{Aut}(\mathcal{S}_3)$, so haben $\sigma \in \mathcal{S}_3$ und $a(\sigma)$ dieselbe Ordnung.)

Aufgabe 7 (1+1+2+1 Punkte). Sei M eine Menge und auf $\mathfrak{P}(M)$ die *symmetrische Differenz* definiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) &\rightarrow \mathfrak{P}(M) \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

- (1) Gib im Falle $M = \{1, 2\}$ die Verknüpfungstafel an.
- (2) Gib ein neutrales Element 1 bzgl. der symmetrischen Differenz an. Zeige, daß $A^2 = 1$ für alle $A \in \mathfrak{P}(M)$ gilt.
- (3) Zeige, daß $(\mathfrak{P}(M), \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet.
- (4) Zeige: Ist $N \subseteq M$, so ist $\mathfrak{P}(N)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}(M)$.

Aufgabe 8 (3 Punkte).

- (1) Zeige, daß $V = \{1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \subseteq \mathcal{S}_4$ Untergruppe ist und gib eine Verknüpfungstafel von V an.
- (2) Bestimme die Elemente von $U := \{\sigma \in \mathcal{S}_4 \mid \varepsilon_\sigma = 1\}$ und zeige, daß dies eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist.
- (3) Gibt es in $\mathcal{S}_4$ ein Element der Ordnung 5? Begründe die Antwort.