Aufgabe 57.

(1) A ist weder hermitesch noch unitär, aber normal, da $A\bar{A}^{\mathrm{t}} = \bar{A}^{\mathrm{t}}A$ ist. Somit ist A also unitär diagonalisierbar. Zunächst ist $\chi_A(X) = X^2 - 25iX$, und mit $U = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ unitär wird $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25i \end{smallmatrix}\right)$.

(2) A ist nicht normal, da $A\bar{A}^{\mathrm{t}} \neq \bar{A}^{\mathrm{t}}A$ ist. Damit ist A nicht unitär diagonalisierbar. Insbesondere ist A auch weder unitär noch hermitesch.

(3) A ist nicht unitär, aber hermitesch, damit auch normal, d.h. unitär diagonalisierbar. Zunächst ist $\chi_A(X) = X(X-4)^3$. Mit $U := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & i & -i & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ wird $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 58.

(1) A ist indefinit, da $q_A(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = 1 > 0$ und $q_A(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)) = -4 < 0$ ist.

(2) A ist positiv definit laut Hauptminorenkriterium, da $\det(4) = 4 > 0$, $\det\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 7 > 0$, $\det\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 3 > 0$ und $\det A = 2 > 0$.

Aufgabe 59.

(1) Diese Aussage ist richtig. Ist A normal, so existiert eine unitäre Matrix U mit $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ist A dazuhin nilpotent, gibt es also ein $m \geq 1$ mit $A^m = 0$, so folgt $0 = \bar{U}^{\mathrm{t}}A^mU = \operatorname{diag}(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$. Dies impliziert jedoch $\lambda_i = 0$ für alle $i \in [1, n]$ und somit auch $A = U\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\bar{U}^{\mathrm{t}} = 0$.

(2) Diese Aussage ist falsch. Z.B. ist $A = (0)$ zwar unitär diagonalisierbar, aber nicht unitär.

(3) Diese Aussage ist falsch. Z.B. ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ diagonalisierbar. Es ist A aber nicht normal und damit auch nicht unitär diagonalisierbar.

(4) Diese Aussage ist richtig. Wäre die Matrix $A - iE$ singulär, so wäre i ein Eigenwert von A. Hermitesche Matrizen haben aber nur reelle Eigenwerte.

(5) Diese Aussage ist richtig. Da A normal und damit unitär diagonalisierbar ist, existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbf{C}^n$ aus Eigenvektoren. Sei die geometrische Vielfachheit von λ gleich l, die von μ gleich m. Dann gibt es paarweise verschiedene Vektoren $u_1, \ldots, u_l$ (mit Eigenwert λ), $v_1, \ldots, v_m$ (mit Eigenwert μ) aus dieser Orthonormalbasis mit $x = \sum_{j\in[1,l]} \alpha_j u_j$ und $y = \sum_{k\in[1,m]} \beta_k v_k$. Damit wird

$$\begin{aligned} \bar{x}^{\mathrm{t}}y &= \overline{\left(\sum_{j\in[1,l]} \alpha_j u_j\right)}^{\mathrm{t}} \sum_{k\in[1,m]} \beta_k v_k \\ &= \sum_{j\in[1,l]} \sum_{k\in[1,m]} \bar{\alpha}_j \beta_k \underbrace{\bar{u}_j^{\mathrm{t}} v_k}_{=0} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 60.

(1) Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbf{C}^n$ mit $Au_j = \lambda_j u_j$ für $j \in [1, n]$. Es ist nun λ der betragsgrößte Eigenwert von A, d.h. es ist $|\lambda| \geq |\lambda_j|$ für $j \in [1, n]$. Schreiben wir $x \in \mathbf{C}^n$ als

$x = \sum_{j\in[1,n]} \alpha_j u_j$, so wird

$$\begin{array}{rcl} \|Ax\|^2 & = & \| \sum_{j\in[1,n]} \alpha_j A u_j \|^2 \\ & = & \| \sum_{j\in[1,n]} \alpha_j \lambda_j u_j \|^2 \\ & = & \left(\sum_{k\in[1,n]} \bar{\alpha}_k \bar{\lambda}_k \bar{u}_k^{\mathrm{t}} \right) \left(\sum_{j\in[1,n]} \alpha_j \lambda_j u_j \right) \\ & = & \sum_{j\in[1,n]} |\alpha_j|^2 |\lambda_j|^2 \\ & \leq & |\lambda|^2 \sum_{j\in[1,n]} |\alpha_j|^2 \\ & = & (|\lambda| \|x\|)^2 \ , \end{array}$$

woraus die Behauptung folgt.

(2) Mit

$$\overline{(AB)}^{\mathrm{t}}(AB) = \bar{B}^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}AB = \bar{B}^{\mathrm{t}}A\bar{A}^{\mathrm{t}}B = A\bar{B}^{\mathrm{t}}\overline{(\bar{B}^{\mathrm{t}}A)}^{\mathrm{t}} = A\bar{B}^{\mathrm{t}}\overline{(A\bar{B}^{\mathrm{t}})}^{\mathrm{t}} = A\bar{B}^{\mathrm{t}}B\bar{A}^{\mathrm{t}} = AB\bar{B}^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}} = (AB)\overline{(AB)}^{\mathrm{t}}$$

ist auch AB normal. Aus

$$\|ABx\| \ \leq \ \|A\|\|Bx\| \ \leq \ \|A\|\|B\|\|x\|$$

folgt, daß $\|A\|\|B\|$ eine obere Schranke von $\{\|ABx\| \mid x \in \mathbf{C}^n,\ \|x\| = 1\}$ ist, und somit $\|AB\| = \max\{\|ABx\| \mid x \in \mathbf{C}^n,\ \|x\| = 1\} \leq \|A\|\|B\|$.

(3) Wähle z.B. $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $A\bar{B}^{\mathrm{t}} = 0 = \bar{B}^{\mathrm{t}}A$, und also insbesondere

$$\|AB\| \ = \ 0 \ < \ 1 \cdot 1 \ = \ \|A\| \cdot \|B\| \ .$$

Aufgabe 61.

(1) Da A hermitesch ist, existiert eine unitäre Matrix U mit $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Da A zudem positiv definit ist, sind alle $\lambda_j > 0$. Wähle nun $B := U\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\bar{U}^{\mathrm{t}}$. Dann ist B hermitesch mit allen Eigenwerten $\sqrt{\lambda_j}$ positiv, d.h. auch B ist positiv definit. Ferner wird $B^2 = U\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^2\bar{U}^{\mathrm{t}} = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\bar{U}^{\mathrm{t}} = A$, wie verlangt.

Die Eindeutigkeit ist etwas aufwendiger zu zeigen. Aber um wirklich eine wohldefinierte Wurzel von A zu haben, hier das Argument.

Sind B und $\tilde{B}$ positiv definite hermitesche Matrizen mit $B^2 = \tilde{B}^2 = A$, so wollen wir $B = \tilde{B}$ zeigen. Nach unitärer Diagonalisierung von $\tilde{B}$ dürfen wir $\tilde{B}$ und A als Diagonalmatrizen mit positiven reellen Diagonaleinträgen voraussetzen, und haben zu zeigen, daß eine positiv definite hermitesche Matrix B, die im Quadrat eine Diagonalmatrix A ergibt, bereits selbst eine Diagonalmatrix ist. Hierzu dürfen wir ferner annehmen, daß übereinstimmende Diagonaleinträge in A zusammensortiert sind, d.h. daß $A = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_1, d_2, \ldots, d_2, d_3, \ldots)$ mit $d_j \neq d_k$ für $j \neq k$.

Sei nun V unitär mit $\bar{V}^{\mathrm{t}}BV =: C$ diagonal. Die Eigenwerte von C^2 sind die Eigenwerte von A, d.h. wir dürfen mit geeigneter Sortierung der Spalten von V annehmen, daß $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_2, c_3, \ldots)$, wobei $c_j > 0$ und $c_j^2 = d_j$ stets. Insbesondere ist bereits $C^2 = A$.

Aus $VA\bar{V}^{\mathrm{t}} = VC^2\bar{V}^{\mathrm{t}} = B^2 = A$ folgt nun $VA = AV$. Damit ist V eine Blockdiagonalmatrix mit Blockeinteilung entsprechend der Einteilung der Diagonale von A in übereinstimmende Einträge. Insbesondere ist $B = VC\bar{V}^{\mathrm{t}} = C$ diagonal.

(2) Wegen $\bar{x}^{\mathrm{t}}\bar{C}^{\mathrm{t}}Cx = \|Cx\|^2$ stets und C regulär ist $\bar{C}^{\mathrm{t}}C$ positiv definit hermitesch. Sei nun $P := \sqrt{\bar{C}^{\mathrm{t}}C}$. Wir müssen mit diesem Ansatz nun $U := CP^{-1}$ setzen, und es bleibt zu zeigen, daß U unitär ist. In der Tat wird

$$\bar{U}^{\mathrm{t}}U \ = \ \overline{CP^{-1}}^{\mathrm{t}} \cdot CP^{-1} \ = \ \overline{P^{-1}}^{\mathrm{t}}\bar{C}^{\mathrm{t}}CP^{-1} \ = \ \overline{P^{-1}}^{\mathrm{t}}P^2P^{-1} \ = \ \overline{P^{-1}}^{\mathrm{t}}\bar{P}^{\mathrm{t}}PP^{-1} \ = \ E \ .$$

Nun zur Eindeutigkeit. Ist $C = UP$ mit U unitär und P positiv hermitesch vorgegeben, so folgt $P^2 = \bar{C}^{\mathrm{t}}C$, somit auch $P = \sqrt{\bar{C}^{\mathrm{t}}C}$ nach (1), und schließlich $U = CP^{-1}$.

(3) Mit $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ unitär und $P = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ positiv definit hermitesch wird $C = UP$.