Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Klausur II am 14.02.03 von 18 bis 22 Uhr, Hilfsmittel: 1 Blatt DIN A4.
Hörsaaleinteilung (nach Nachnamen sortiert): H22: A-Kas, H3: Kat-M, H4/5: N-Z.

Aufgabe 57 (10 Punkte).
Sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Entscheide, ob A normal, unitär oder hermitesch ist. Diagonalisiere unitär, falls möglich.

(1) $A = \begin{pmatrix} 16i & -12i \\ -12i & 9i \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1 & -1 \\ i & 3 & -i & i \\ 1 & i & 3 & 1 \\ -1 & -i & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 58 (6 Punkte).
Untersuche die hermitesche Matrix $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ auf Definitheit.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & i \\ 3 & -i & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 59 (5 Punkte).
Sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Ist A normal und nilpotent, so ist $A = 0$.

(2) Ist A unitär diagonalisierbar, so ist A unitär und diagonalisierbar.

(3) Ist A unitär oder diagonalisierbar, so ist A unitär diagonalisierbar.

(4) Ist A hermitesch, so ist die Matrix $A - iE$ regulär.

(5) Sei A normal. Ist x Eigenvektor zum Eigenwert λ und y Eigenvektor zum Eigenwert μ, und gilt $\mu \neq \lambda$, so ist $\bar{x}^{\mathrm{t}} y = 0$.

....

Die folgenden beiden Aufgaben sind nicht klausurrelevant. Sie sollen, wo nötig, zum Füllen des Punktekontos verwandt werden.

Aufgabe 60 (9 Zusatzpunkte).
Sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ normal, λ der dem Betrag nach größte Eigenwert von A und $y \in \mathbf{C}^n$ zugehöriger Eigenvektor mit $\|y\| = 1$. Definiere die Matrixnorm von A als $\|A\| := |\lambda|$.

(1) Zeige: $\|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\|$ für alle $x \in \mathbf{C}^n$. (Hinweis: Schreibe x als Linearkombination orthonormaler Eigenvektoren.) Insbesondere ist wegen $\|Ay\| = \|A\|$ auch $\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid x \in \mathbf{C}^n,\ \|x\| = 1\}$.

(2) Seien $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ normal mit $A\bar{B}^{\mathrm{t}} = \bar{B}^{\mathrm{t}}A$. Zeige: AB ist normal, und es ist $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(3) Finde zwei normale Matrizen $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ mit $A\bar{B}^{\mathrm{t}} = \bar{B}^{\mathrm{t}}A$ und $\|AB\| < \|A\| \cdot \|B\|$.

Aufgabe 61 (9 Zusatzpunkte).

(1) Sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ hermitesch und positiv definit. Zeige, daß eine positiv definite hermitesche Matrix $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$ existiert. Man kann weiter zeigen (hier nicht verlangt), daß $B =: \sqrt{A}$ dadurch auch eindeutig bestimmt ist.

(2) Sei $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Zeige: Es existiert genau eine unitäre Matrix U und genau eine positiv definite hermitesche Matrix P mit $C = UP$. (Hinweis: Zeige, daß $\bar{C}^{\mathrm{t}}C$ positiv definit hermitesch und $U := C(\sqrt{\bar{C}^{\mathrm{t}}C})^{-1}$ unitär.)

(3) Zerlege $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times 3}$ in ein Produkt $C = UP$ einer unitären Matrix U mit einer positiv definiten hermiteschen Matrix P.