Aufgabe 53.

(1) Es ist A normal, aber weder unitär noch hermitesch.

(2) Es ist A hermitesch, und also auch normal. Jedoch ist A nicht unitär.

(3) Die Matrix A ist nie hermitesch. Da $\bar{A}^{\mathrm{t}}A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ -\bar{a} & 1+a\bar{a} \end{smallmatrix}\right)$ und $A\bar{A}^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i\bar{a} \\ -ia & 1+a\bar{a} \end{smallmatrix}\right)$, ist A normal für jedes $a = (1-i)r$ mit $r \in \mathbf{R}$. Ist dazuhin $r = 0$, also $a = 0$, so ist A auch unitär.

(4) Zunächst ist A hermitesch genau dann, wenn $(a, c \in \mathbf{R}$ und $b = -2)$ oder $a = 0$.
Allgemein ist $\bar{A}^{\mathrm{t}}A = a\bar{a} \begin{pmatrix} 9 & 2+c+2b & 0 \\ 2+\bar{c}+2\bar{b} & 1+\bar{c}c+\bar{b}b & 2-2\bar{c}-\bar{b} \\ 0 & 2-2c-b & 9 \end{pmatrix}$ und $A\bar{A}^{\mathrm{t}} = a\bar{a} \begin{pmatrix} 9 & \bar{c}-2 & \bar{b}+2 \\ c-2 & 5+c\bar{c} & 4+\bar{b}c \\ b+2 & 4+b\bar{c} & 5+b\bar{b} \end{pmatrix}$. Somit ist A normal für $(b = -2$ und $c \in \mathbf{R})$ oder $a = 0$. Gilt zusätzlich $|a| = 1/3$ und $c = 2$, so ist A unitär.

(5) Die Matrix A ist hermitesch genau dann, wenn $a, b, c \in \mathbf{R}$.
Allgemein ist $\bar{A}^{\mathrm{t}}A = \left(\begin{smallmatrix} a\bar{a}+b\bar{b} & \bar{a}b+\bar{b}c \\ a\bar{b}+b\bar{c} & b\bar{b}+c\bar{c} \end{smallmatrix}\right)$ und $A\bar{A}^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} a\bar{a}+b\bar{b} & a\bar{b}+b\bar{c} \\ \bar{a}b+\bar{b}c & b\bar{b}+c\bar{c} \end{smallmatrix}\right)$. Also ist A normal genau dann, wenn $a\bar{b} + b\bar{c} \in \mathbf{R}$. Ist dazuhin $a\bar{b} + b\bar{c} = 0$ und $a\bar{a} = c\bar{c} = 1 - b\bar{b}$, so ist A unitär.

Aufgabe 54.

(1) Seien $x, x' \in U^{\perp}$, und $\lambda, \lambda' \in \mathbf{C}$. Wir haben zu zeigen, daß $\lambda x + \lambda' x' \in U^{\perp}$. Für $y \in U$ wird aber nun in der Tat

$$\bar{y}^{\mathrm{t}}(\lambda x + \lambda' x') \;=\; \lambda \bar{y}^{\mathrm{t}} x + \lambda' \bar{y}^{\mathrm{t}} x' \;=\; 0\,.$$

Also ist $U^{\perp} \leq \mathbf{C}^n$.

(2) Seien $y_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ und $y_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ durch $y_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ zu einer Basis des $\mathbf{C}^3$ ergänzt. Nach Gram-Schmidt gilt mit $x_1 := y_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned} x_2 &= (y_2 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_2) x_1)^0 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)\right)^0 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{smallmatrix}\right) \\ x_3 &= (y_3 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_3) x_1 - (\bar{x}_2^{\mathrm{t}} y_3) x_2)^0 = \cdots = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ i \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Damit ist (x_1, x_2) eine Orthonormalbasis von U, und (x_3) eine Orthonormalbasis von $U^{\perp}$.

(3) Seien $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch $y_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis des $\mathbf{C}^5$ ergänzt. Nach Gram-Schmidt gilt mit $x_1 := (y_1)^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} x_2 &= (y_2 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_2) x_1)^0 &&= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \\ x_3 &= (y_3 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_3) x_1 - (\bar{x}_2^{\mathrm{t}} y_3) x_2)^0 &&= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_4 &= (y_4 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_4) x_1 - (\bar{x}_2^{\mathrm{t}} y_4) x_2 - (\bar{x}_3^{\mathrm{t}} y_4) x_3)^0 &&= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x_5 &= (y_5 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_5) x_1 - (\bar{x}_2^{\mathrm{t}} y_5) x_2 - (\bar{x}_3^{\mathrm{t}} y_5) x_3 - (\bar{x}_4^{\mathrm{t}} y_5) x_4)^0 &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist (x_1, x_2, x_3) eine Orthonormalbasis von U, und (x_4, x_5) eine Orthonormalbasis von $U^{\perp}$.

Aufgabe 55.

(1) Diese Aussage ist wahr, da $\overline{(\bar{C}^{\mathrm{t}}C)}^{\mathrm{t}} = (C^{\mathrm{t}}\bar{C})^{\mathrm{t}} = \bar{C}^{\mathrm{t}}(C^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \bar{C}^{\mathrm{t}}C$.

(2) Diese Aussage ist richtig, da $\overline{(r(A+\bar{A}^{\mathrm{t}}))}^{\mathrm{t}} = r(A+\bar{A}^{\mathrm{t}})$.

(3) Diese Aussage ist i.a. falsch. Z.B. sind die Matrizen $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hermitesch, ihr Produkt $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist aber nicht normal (noch nicht einmal diagonalisierbar).

(4) Diese Aussage ist richtig. In den Spalten einer Permutationsmatrix stehen paarweise verschiedene Standardbasisvektoren. Für Standardbasisvektoren gilt aber: $\bar{e}_j^{\mathrm{t}} e_k = 0$ für $j \neq k$ und $\|e_j\| = 1$ für alle j, und somit bilden die Spalten einer Permutationsmatrix ein Orthonormalsystem. Damit ist die Matrix unitär.

(5) Diese Aussage ist wahr. Als orthonormales Tupel der Länge 1 kann (x) mit Gram-Schmidt zu einer Orthonormalbasis von $\mathbf{C}^n$ ergänzt werden, und die Vektoren dieser Basis bilden die Spalten einer unitären Matrix, welche x in der ersten Spalte stehen hat.

(6) Diese Aussage ist wahr. Sei x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann ist $\bar{x}^{\mathrm{t}}x \neq 0$, und folglich kann man aus

$$\bar{\lambda}\bar{x}^{\mathrm{t}}x \;=\; \bar{x}^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}x \;=\; \bar{x}^{\mathrm{t}}Ax \;=\; \lambda\bar{x}^{\mathrm{t}}x$$

schließen, daß $\lambda = \bar{\lambda}$.

(7) Diese Aussage ist wahr. Für $\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$, d.h. für $\bar{x}^{\mathrm{t}}x + \bar{x}^{\mathrm{t}}y + \bar{y}^{\mathrm{t}}x + \bar{y}^{\mathrm{t}}y \le \bar{x}^{\mathrm{t}}x + 2\|x\|\|y\| + \bar{y}^{\mathrm{t}}y$ ist zu zeigen, daß $2\operatorname{Re}(\bar{x}^{\mathrm{t}}y) = \bar{x}^{\mathrm{t}}y + \bar{y}^{\mathrm{t}}x \le 2\|x\|\|y\|$. Dies aber folgt mit dem Lemma von Cauchy-Schwarz, nach welchem $|\bar{x}^{\mathrm{t}}y| \le \|x\|\|y\|$ gilt, da $\operatorname{Re}\zeta \le |\zeta|$ für alle $\zeta \in \mathbf{C}$.

(8) Diese Aussage ist wahr. Ist A unitär, und ist $x \in \mathbf{C}^n$ vorgegeben, so wird $\|Ax\|^2 = (\bar{x}^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}})(Ax) = \bar{x}^{\mathrm{t}}x = \|x\|^2$. Ist umgekehrt $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$ stets, so wird zunächst $(\bar{e}_j^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}})(Ae_j) = \bar{e}_j^{\mathrm{t}}e_j = 1$ für $j \in [1,n]$. Für $j,k \in [1,n]$ mit $j \neq k$ wird nun

$$\begin{array}{rcccl} ((\bar{e}_j^{\mathrm{t}} + \bar{e}_k^{\mathrm{t}})\bar{A}^{\mathrm{t}})(A(e_j+e_k)) & = & (\bar{e}_j^{\mathrm{t}} + \bar{e}_k^{\mathrm{t}})(e_j+e_k) & = & 2 \\ ((\bar{e}_j^{\mathrm{t}} - i\bar{e}_k^{\mathrm{t}})\bar{A}^{\mathrm{t}})(A(e_j+ie_k)) & = & (\bar{e}_j^{\mathrm{t}} - i\bar{e}_k^{\mathrm{t}})(e_j+ie_k) & = & 2\,, \end{array}$$

woraus wir zum einen $\bar{e}_j^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}Ae_k + \bar{e}_k^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}Ae_j = 2\operatorname{Re}(\bar{e}_j^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}Ae_k) = 0$, und zum andern $i\bar{e}_j^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}Ae_k - i\bar{e}_k^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}Ae_j = 2i\operatorname{Im}(\bar{e}_j^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}Ae_k) = 0$ schließen können. Insgesamt ist $\bar{e}_j^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}Ae_k = 0$, und die Spalten Ae_j von A bilden ein Orthonormalsystem. Folglich ist A unitär.