

Aufgabe 51.

- (1) Aus $\mu_A(S^{-1}AS) = 0$ folgt, dass $\mu_{S^{-1}AS}(X)$ das Polynom $\mu_A(X)$ teilt (vgl. Lösung zu 49(1,2)). Aus $\mu_{S^{-1}AS}(A) = 0$ folgt genauso, dass $\mu_A(X)$ das Polynom $\mu_{S^{-1}AS}(X)$ teilt. Wenn also diese beiden Gleichungen gelten, so folgt $\mu_A(X) = \mu_{S^{-1}AS}(X)$. Die erste dieser Gleichungen gilt wegen $\mu_A(S^{-1}AS) = S^{-1}\mu_A(A)S = 0$. Die andere gilt wegen $\mu_{S^{-1}AS}(A) = SS^{-1}\mu_{S^{-1}AS}(A)SS^{-1} = S\mu_{S^{-1}AS}(S^{-1}AS)S^{-1} = 0$.
- (2) (a) Es ist $\chi_A(X) = X^2$. Somit ist 0 der einzige Eigenwert von A und hat die algebraische Vielfachheit 2. Die Jordansche Normalform ergibt sich mit z.B. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu $B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Daraus kann man ablesen, dass $E_A(0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $H_A(0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ sind. Ferner ist $\mu_A(X) = \mu_B(X) = X^2$.
- (b) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)^3$. Somit ist 1 der einzige Eigenwert von A und hat die algebraische Vielfachheit 3. Die Jordansche Normalform ergibt sich mit z.B. $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu $B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Daraus kann man ablesen, dass $E_A(1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $H_A(1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ sind. Ferner ist $\mu_A(X) = \mu_B(X) = (X-1)^2$.
- (c) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)^3$. Somit ist 1 der einzige Eigenwert von A und hat die algebraische Vielfachheit 3. Die Jordansche Normalform ergibt sich mit z.B. $S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu $B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Daraus kann man ablesen, dass $E_A(1) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ und $H_A(1) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ sind. Ferner ist $\mu_A(X) = \mu_B(X) = (X-1)^3$.
- (d) Es ist $\chi_A(X) = (X+1)^4(X+i)$. Somit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 4 und $\lambda_2 = -i$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Die Jordansche Normalform ergibt sich mit z.B. $S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zu $B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$. Daraus kann man ablesen, dass $E_A(-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $H_A(-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, sowie $E_A(-i) = H_A(-i) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ sind. Ferner ist $\mu_A(X) = \mu_B(X) = (X+1)^3(X+i)$.

Aufgabe 52.

- (1) (a) Mit z.B. $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ wird $B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Damit gilt für $m \geq 1$:

$$A^m = SB^mS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^{m+1} & 1-2^m \\ -2+2^{m+1} & 2-2^m \end{pmatrix}.$$
- (b) Mit z.B. $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ folgt $B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Damit gilt für $m \geq 2$:

$$A^m = SB^mS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & m & -m-1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ m & -m & m+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- (2) (a) Mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wird $\begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{m-1} \\ a_{m-2} \end{pmatrix}$. A lässt sich mit z.B. $S := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ umformen zu $B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Es ist also $B^{m-1} = \begin{pmatrix} (-2)^{m-1} & 0 \\ 0 & 3^{m-1} \end{pmatrix}$ und somit $A^{m-1} = SB^{m-1}S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -(-2)^{m+3m} & 3(-2)^{m+2.3m} \\ -(-2)^{m-1+3m-1} & 3(-2)^{m-1+2.3m-1} \end{pmatrix}$. Damit ist $a_m = \frac{1}{5}(-(-2)^m + 3^m + 3(-2)^m + 2 \cdot 3^m) = \frac{1}{5}(-(-2)^{m+1} + 3^{m+1})$, wie sich aus $\begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = A^{m-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ ergibt.

(b) Mit $A := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ wird $B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $S := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gewählt wurde.

Somit folgt $B^{m-2} = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & \binom{m-2}{2} \\ 0 & 1 & m-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Damit gilt $A^{m-2} = SB^{m-2}S^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{m-2}{2} + 2m-3 & 6-3m-2\binom{m-2}{2} & \binom{m-2}{2} + m-2 \\ \binom{m-2}{2} + m-2 & 3-m-2\binom{m-2}{2} & \binom{m-2}{2} \\ \binom{m-2}{2} & -2+m-2\binom{m-2}{2} & 3-m+\binom{m-2}{2} \end{pmatrix}$

und mit $\begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ a_{m-2} \end{pmatrix} = A^{m-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ also $a_m = 4 - \binom{m-2}{2} - 2m = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 1$.

Aufgabe 53.

- (1) Diese Aussage ist i.a. falsch. Z.B. ist für $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das Produkt der Diagonalelemente gleich 1. Für $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist das Produkt der Diagonalelemente aber gleich 0.
- (2) Diese Aussage ist wahr.
Die Matrix $S^{-1}AS = \lambda E_n + N_n$ hat den Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit n und geometrischer Vielfachheit 1, und somit gilt dies auch für A .
Ist umgekehrt die algebraische Vielfachheit von λ gleich n , so ist $K^n = H_A(\lambda)$. Ist dazu die geometrische Vielfachheit gleich 1, so kann es nicht mehr als einen Jordanblock zum Eigenwert λ geben und damit insgesamt genau einen Jordanblock der Form $\lambda E_n + N_n$.
- (3) Diese Aussage ist i.a. falsch. Z.B. sind die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht.
- (4) Diese Aussage ist wahr. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \chi_{A^{-1}}(X) &= \det(XE - A^{-1}) \\ &= (\det A)^{-1} \det(XA - E) \\ &= (-X)^n (\det A)^{-1} \det(X^{-1}E - A) \\ &= (-X)^n (\det A)^{-1} \chi_A(X^{-1}), \end{aligned}$$

woraus die Aussage folgt. (Strenggenommen muß man für dieses Argument den Körper der rationalen Funktionen $K(X) = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid f(X), g(X) \right\}$ mit den üblichen Kürzungsregeln einführen, um von X^{-1} reden zu können.)

- (5) Die Aussage ist wahr.
Gilt $(A - E)^m = 0$ für ein $m \in \mathbf{N}$, so ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert von A . Denn es gilt $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - E)x = (\lambda - 1)x \Rightarrow 0 = (A - E)^m x = (\lambda - 1)^m x$ und damit $\lambda = 1$. (Man könnte alternativ auch Satz 13 auf $A - E$ anwenden.)
Sei $S \in \text{GL}_n(K)$ mit $S^{-1}AS = \text{diag}(E_{b_1} + N_{b_1}, \dots, E_{b_k} + N_{b_k})$ (Blockdiagonalmatrix). Dann ist $S^{-1}A^2S = \text{diag}((E_{b_1} + N_{b_1})^2, \dots, (E_{b_k} + N_{b_k})^2)$. Können wir nun $T_i \in \text{GL}_{b_i}(K)$ so finden, dass $T_i^{-1}(E_{b_i} + N_{b_i})^2 T_i = E_{b_i} + N_{b_i}$ für alle $i \in [1, k]$, dann wird mit $T := \text{diag}(T_1, \dots, T_k)$ die Konjugation mit ST zu $(ST)^{-1}A^2(ST) = T^{-1}(S^{-1}A^2S)T = S^{-1}AS$. Damit folgt die Aussage dann mit $U := STS^{-1}$.
Bleibt zu zeigen, dass für $b \geq 1$ die Matrix $(E_b + N_b)^2$ genau einen Jordanblock hat, und zwar zum Eigenwert 1. Dies folgt aus (2), da $(E_b + N_b)^2$ den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit n und geometrischer Vielfachheit 1 hat – für letzteres verwendet man $2 \neq 0$ in $\mathbf{C}$.