Matthias Künzer, Norbert Renz

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 51 (1+4+4+4+8 Punkte).

Sei $n \geq 1$, sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei $A \in K^{n \times n}$.

(1) Zeige: $\mu_{S^{-1}AS}(X) = \mu_A(X)$ für $S \in \mathrm{GL}_n(K)$. (Hinweis: Wieso genügt es, $\mu_A(S^{-1}AS) = 0$ und $\mu_{S^{-1}AS}(A) = 0$ zu zeigen?)

(2) Sei $K = \mathbf{C}$. Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$, die Jordansche Normalform von A, Basen der Eigen- und Haupträume von A und das Minimalpolynom $\mu_A(X)$.

(a) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1-i & 0 & -1+i & -i \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & i-2 & -1 & 1-i & i-2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(Hinweis: $X + i$ teilt $\chi_A(X)$.)

Aufgabe 52 (12 Punkte).

(1) Berechne A^m für $m \geq 1$ über die Jordansche Normalform $B = S^{-1}AS$.

(a) $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(Hinweis: Verwende $A^m = SB^mS^{-1}$.)

(2) Berechne a_m für $m \geq 1$.

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $\qquad a_m = a_{m-1} + 6a_{m-2}$.
(Hinweis: Bestimme zunächst $A \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ so, dass $\begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{m-1} \\ a_{m-2} \end{pmatrix}$. Bestimme dann $B := S^{-1}AS$ in Jordanscher Normalform und berechne $\begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = A^{m-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = SB^{m-1}S^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$.)

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\qquad a_m = 3a_{m-1} - 3a_{m-2} + a_{m-3}$.
(Hinweis: analog zu (a), nur $A \in \mathbf{C}^{3\times 3}$.)

Aufgabe 53 (5 Punkte).

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei $A \in K^{n\times n}$. Zeige oder widerlege:

(1) Das Produkt der Hauptdiagonaleinträge von A ist invariant unter Konjugation.

(2) Sei λ ein Eigenwert von A. Die algebraische Vielfachheit von λ ist gleich n und die geometrische gleich 1 genau dann, wenn es ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit $S^{-1}AS = \lambda E_n + N_n$.

(3) Das Produkt diagonalisierbarer Matrizen ist diagonalisierbar.

(4) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, und sei $\chi_A(X) := \sum_{i\in[1,n]} h_i X^i$. Dann ist $\chi_{A^{-1}}(X) = \frac{1}{h_0} \sum_{i\in[0,n]} h_{n-i} X^i$.

(5) Sei $K = \mathbf{C}$, und sei die Matrix $A - E$ nilpotent. Dann gibt es ein $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $U^{-1}A^2U = A$.