Aufgabe 48.

(1) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)^2$. Damit ergibt sich der Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Der Eigenraum zu $\lambda = 1$ ergibt sich zu $E_A(1) = \mathrm{Kern}(1E - A) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Damit ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts 1. Der Hauptraum ergibt sich zu $H_A(1) = \mathrm{Kern}(1E - A)^2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \mathbf{C}^2$. Damit ist $l = 2$.

(2) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)$. Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ ergibt sich zu $E_A(1) = \mathrm{Kern}(1E - A) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$ ergibt sich zu $E_A(2) = \mathrm{Kern}(2E - A) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Damit ist die geometrische Vielfachheit jeweils 1. Da in jedem Fall die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist, ergeben sich die Haupträume zu $H_A(\lambda_i) = E_A(\lambda_i)$. Damit ist $l_1 = l_2 = 1$. Zur Probe sieht man, dass $(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))$ eine Basis von $\mathbf{C}^2$ ist.
Bemerkung: Mit $S := \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ wird $S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(3) Es ist $\chi_A(X) = (X+1)^2(X-i)$. Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = i$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = -1$ ergibt sich zu $E_A(-1) = \mathrm{Kern}(-1E - A) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Damit hat λ_1 die geometrische Vielfachheit 1. Der Hauptraum zu $\lambda_1 = -1$ ergibt sich zu $H_A(-1) = \mathrm{Kern}(-1E - A)^2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Damit ist $l_1 = 2$.
Der Eigenraum zu $\lambda_2 = i$ ergibt sich zu $E_A(i) = \mathrm{Kern}(iE - A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\lambda_2 = i$ hat also die geometrische Vielfachheit 1. Es ist $H_A(i) = E_A(i)$, da algebraische Vielfachheit gleich geometrische Vielfachheit. Es gilt $l_2 = 1$. Zur Probe sieht man, dass $(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathbf{C}^3$ ist.
Bemerkung: Mit $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ wird $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

(4) Es ist $\chi_A(X) = X^3 + 6X^2 + 12X + 8 = (X+2)^3$. Damit ergibt sich der Eigenwert $\lambda = -2$ mit algebraischer Vielfachheit 3. Der Eigenraum ist $E_A(-2) = \mathrm{Kern}(-2E - A) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und somit ist die geometrische Vielfachheit 1. Der Hauptraum ist $H_A(-2) = \mathrm{Kern}(-2E - A)^3 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbf{C}^3$. Damit ist $l = 3$.
Bemerkung: Mit $S := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ wird $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(5) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)(X+1)^3$. Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 3. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ ergibt sich zu $E_A(1) = \mathrm{Kern}(1E - A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, und somit hat $\lambda_1 = 1$ die geometrische Vielfachheit 1. Wegen algebraischer Vielfachheit gleich geometrischer Vielfachheit ist $H_A(1) = E_A(1)$. Also ist $l_1 = 1$.
Es gilt $E_A(-1) = \mathrm{Kern}(-1E - A) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, also hat λ_2 die geometrische Vielfachheit 2. Der Hauptraum ist $H_A(-1) = \mathrm{Kern}(-1E - A)^2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $l_2 = 2$. Zur Probe sieht man, dass $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathbf{C}^4$ ist.
Bemerkung: Mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(6) Es ist $\chi_A(X) = (X-i)^2(X-1)^3$. Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = i$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = i$ ergibt sich zu $E_A(i) = \mathrm{Kern}(iE - A) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, und somit ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts 1. Es ist $H_A(i) = \mathrm{Kern}(iE - A)^2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Damit ist $l_1 = 2$.

Es gilt $E_A(1) = \text{Kern}(1E - A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, also ist die geometrische Vielfachheit von λ_2 gleich 1.

Der Hauptraum ist $H_A(1) = \text{Kern}(1E - A)^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, und $l_2 = 3$. Zur Probe sieht man, dass $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathbf{C}^5$ ist.

Bemerkung: Mit $S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ wird $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 49.

(1, 2) Sei $I := \{f(X) \in K[X] \mid f(A) = 0\} \subseteq K[X]$. Diese Teilmenge I ist ein Ideal von $K[X]$. Es ist $\chi_A(X) \in I$, also $I \neq \{0\}$. Also gibt es ein normiertes Polynom $\mu_A(X) \in K[X]$ mit $I = \mu_A(X)K[X]$. In anderen Worten, ist $f(A) = 0$, so teilt $\mu_A(X)$ das Polynom $f(X)$. Dies zeigt, dass $\mu_A(X)$ die verlangten Eigenschaften erfüllt. Insbesondere folgt die Eindeutigkeit aus der Tatsache, daß wenn ein normiertes Polynom ein weiteres normiertes Polynom von gleichem Grad teilt, diese gleich sein müssen.
(Unter Verwendung des Hinweises ist auch ein elementareres Vorgehen möglich.)

(3) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)^3$ und $\mu_A(X) = (X-1)^2$.

(4) Es ist $\chi_A(X) = (X-3)[(X-2)(X-1)-2] = X(X-3)^2$ und $\mu_A(X) = X(X-3)$.

(5) Z.B. hat $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = (X+1)^4$ und das Minimalpolynom $\mu_A(X) = (X+1)^3$.

Aufgabe 50.

(1) Diese Aussage ist i.a. falsch. Z.B. gilt für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, dass $\chi_A(X) = \det(XE - A) = \det\begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow X^2 = -1$, und somit hat sie keinen Eigenwert in $\mathbf{R}$.

(2) Die Aussage ist richtig, da die Determinante von A das Produkt ihrer Eigenwerte ist (zu nehmen mit algebraischen Vielfachheiten).

(3) Diese Aussage ist i.a. falsch. Z.B. hat die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nur den Eigenwert $\lambda = 1$, die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nur den Eigenwert $\mu = 1$. Aber es gilt: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_{AB}(X) = X^2 - 3X + 1$, was an der Stelle $\lambda\mu = 1$ nicht verschwindet.

(4) Diese Aussage ist richtig.
Ist λ der einzige Eigenwert von A, so folgt die Behauptung mit der Aussage (ii) des Hauptzerlegungslemmas. Denn hier ist $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^n$ und folglich $K^n = H_A(\lambda_1) = \text{Kern}(A - \lambda_1)^n$. Dies impliziert $(A - \lambda_1)^n = 0$.
Umgekehrt: Sei x Eigenvektor zum Eigenwert μ, also $(\mu E - A)x = 0$. Zu zeigen ist: $\lambda = \mu$. Es gilt: $(\lambda E - A)x = \lambda x - Ax - (\mu E - A)x = \lambda x - Ax - \mu x + Ax = (\lambda - \mu)x$. Somit ist $0 = (\lambda E - A)^n x = (\lambda - \mu)^n x$, und wegen $x \neq 0$ folgt schließlich $\lambda = \mu$.

(5) Diese Aussage ist i.a. falsch. Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\chi_A(X) = X^2$, damit $\lambda = 0$ Eigenwert, $E_A(0) = \langle (\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}) \rangle$ und $H_A(0) = \langle (\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}) \rangle$. Damit gilt $E_A(0) < H_A(0)$. Für $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit Eigenwert $\mu = 0$ ist aber $E_A(0) = \langle (\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}) \rangle = H_A(0)$. Somit $E_A(0)$ kein echter Teilraum von $H_A(0)$.
Der erste Teil der Behauptung ist hingegen allgemein richtig. Denn $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$ impliziert $A^2x = A(\lambda x) = \lambda^2 x$.