Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 48 (18 Punkte).

Sei $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$. Berechne das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von A . Gib die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. Gib Basen der Eigen- und Haupträume an. Bestimme jeweils $l_i \geq 1$ minimal mit $\text{Kern}(\lambda_i E - A)^{l_i} = H_A(\lambda_i)$. Zur Probe verifiziere man, dass $K^n = \bigoplus_{i \in [1, k]} H_A(\lambda_i)$.

(Hinweis: Hat ein Polynom $f(X)$ nur ganzzahlige Nullstellen, so teilt jede $f(0)$.)

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1-i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 1 & -1 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1-i & 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix}$

Aufgabe 49 (1+1+2+2+1 Punkte). Sei $A \in K^{n \times n}$, wobei K algebraisch abgeschlossen ist.

(1) Zeige: Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $f(X)$ kleinsten Grades mit $f(A) = 0$. (Dieses Polynom heisst *Minimalpolynom* von A und wird als $\mu_A(X)$ bezeichnet.)

(2) Zeige: $\mu_A(X)$ teilt $\chi_A(X)$. (Hinweis: Cayley-Hamilton und Polynomdivision.)

(3) Bestimme $\chi_A(X)$ und $\mu_A(X)$ der komplexwertigen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) Bestimme $\chi_A(X)$ und $\mu_A(X)$ der komplexwertigen Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) Gib eine Matrix $A \in \mathbf{C}^{4 \times 4}$ an mit $\chi_A(X) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$ und $\mu_A(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.

Aufgabe 50 (5 Punkte).

Seien $A, B \in \mathbf{C}^{n \times n}$. Zeige oder widerlege:

(1) Ist $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, so hat A nur reelle Eigenwerte.

(2) Die Matrix A ist regulär genau dann, wenn alle Eigenwerte von Null verschieden sind.

(3) Ist λ der einzige Eigenwert von A und μ der einzige Eigenwert von B , so ist $\lambda\mu$ Eigenwert von AB .

(4) Genau dann ist λ der einzige Eigenwert von A , wenn $(\lambda E - A)^n = 0$.

(5) Hat A den Eigenwert λ und gilt: $E_A(\lambda) < H_A(\lambda)$ (echter Teilraum), so hat A^2 den Eigenwert λ^2 , und es ist $E_{A^2}(\lambda^2) < H_{A^2}(\lambda^2)$.