Aufgabe 44.

(1) Es ist $\det A = -1$.

(2) Es ist $\det A = 2i$.

(3) Es ist $\det A = 4$ (verwende Gauß).

(4) Es ist $\det A = 0$, da die Differenz der ersten und der dritten Spalte die vierte ergibt, das Spaltentupel also linear abhängig ist (oder: Gauß).

(5) Nach Laplace ist $\det A = -2\det\begin{pmatrix} 7 & 0 & 10 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 13 & 15 & 4 \\ 8 & 0 & 11 & 13 & 2 \\ 9 & 0 & 12 & 14 & 3 \\ 10 & -1 & 13 & 15 & 0 \end{pmatrix} = -2\left(3\det\begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 & 1 \\ 8 & 11 & 13 & 2 \\ 9 & 12 & 14 & 3 \\ 10 & 13 & 15 & 0 \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 & 1 \\ 5 & 13 & 15 & 4 \\ 8 & 11 & 13 & 2 \\ 9 & 12 & 14 & 3 \end{pmatrix}\right)$ $= 0$, da die Zeilen der verbleibenden Matrizen jeweils linear abhängig sind (wie etwa mit Gauß zu sehen).

Eine solche Matrix A mit der Leibnizschen Formel auszurechnen, würde dauern.

Aufgabe 45.

(1) Wir führen eine Induktion nach n durch. Für $n = 1$ ist $\det A_1 = 1 = s^0\binom{1}{0}$. Für $n = 2$ ist $\det A_2 = 1 + s^2 = s^0\binom{2}{0} + s^2\binom{1}{1}$.
Für den Induktionsschritt $n-2, n-1 \to n$ entwickeln wir mit Laplace nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det A_n &= \det A_{n-1} + s\cdot\det\begin{pmatrix} s & -s & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -s & & \cdots & 0 \\ 0 & s & 1 & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s & 1 & -s \\ 0 & 0 & \cdots & & s & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det A_{n-1} + s^2\det A_{n-2} \\
&\overset{\text{I.H.}}{=} \textstyle\sum_{j\geq 0} s^{2j}\binom{n-1-j}{j} + \sum_{j\geq 0} s^{2j+2}\binom{n-2-j}{j} \\
&= 1 + \textstyle\sum_{j\geq 1} s^{2j}\left(\binom{n-1-j}{j} + \binom{n-1-j}{j-1}\right) \\
&= 1 + \textstyle\sum_{j\geq 1} s^{2j}\binom{n-j}{j} \\
&= \sum_{j\geq 0} s^{2j}\binom{n-j}{j}\ .
\end{aligned}$$

(2) Wir führen eine Induktion nach n durch. Für $n = 1$ ist die Aussage richtig, da das leere Produkt den Wert 1 annimmt. Sei die Behauptung für $n-1$ gezeigt. Es wird

$$\begin{aligned}
\det A &\overset{\substack{\text{Gauß auf Zeilen,} \\ \text{unten angefangen}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & \cdots & x_n^2-x_1x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1}-x_1x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & \cdots & x_n^2-x_1x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1}-x_1x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\det\begin{pmatrix} x_2^0 & x_3^0 & \cdots & x_n^0 \\ x_2^1 & x_3^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{I.H.}}{=} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\textstyle\prod_{2\leq i<j\leq n}(x_j-x_i) \\
&= \textstyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)\ .
\end{aligned}$$

(3) Es ist $\det A = 1+\alpha$, die Matrix A ist also in der Tat invertierbar. Schreibe $A^{-1} = (b_{i,j})_{i,j}$. Mit der Cramerschen Regel folgt

$$\begin{array}{rcccccl} b_{3,2} & = & (\det A)^{-1}(-1)^{3+2}\det A_{2,3} & = & (1+\alpha)^{-1}\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 1+\alpha & 1 \\ 1+\alpha & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & = & 0 \\ b_{1,4} & = & (\det A)^{-1}(-1)^{1+4}\det A_{4,1} & = & (1+\alpha)^{-1}\det\left(\begin{smallmatrix} 1+\alpha & \alpha & 1+\alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 1+\alpha & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & = & 1\,. \end{array}$$

(4) Wir erhalten

$$\begin{array}{lcccrcl} \det A(0) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & = & 0 & = & 0^4 \\ \det A(1) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & = & 1 & = & 1^4 \\ \det A(-1) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) & = & 1 & = & (-1)^4 \\ \det A(\iota) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & = & 1 & = & \iota^4 \\ \det A(\iota+1) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) & = & -1 & = & (\iota+1)^4 \\ \det A(\iota-1) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) & = & -1 & = & (\iota-1)^4 \\ \det A(-\iota) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & = & 1 & = & (-\iota)^4 \\ \det A(-\iota+1) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) & = & -1 & = & (-\iota+1)^4 \\ \det A(-\iota-1) & = & \det\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right) & = & -1 & = & (-\iota-1)^4 \end{array}$$

(Fakultativ: wieso?).

Aufgabe 46.

(1) Liegen alle Einträge von A^{-1} in $\mathbf{Z}$, so ist auch $\det A^{-1} \in \mathbf{Z}$ (Leibniz). Wegen $(\det A^{-1})^{-1} = \det A \in \mathbf{Z}$ muß $\det A \in \{-1,+1\}$ gelten.

Umgekehrt, falls $\det A \in \{-1,+1\}$, so ist zunächst $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$. Wegen $(\det A)^{-1} \in \mathbf{Z}$ zeigt nun die Cramersche Regel, daß A^{-1} ganzzahlige Einträge hat.

(2) Zu zeigen ist hier, daß für $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ auch $AB^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ ist. Es gilt aber $\det(AB^{-1}) = (\det A)\cdot(\det B)^{-1}$ laut Determinantenmultiplikationslemma. Somit ist wegen (1) also $\det(AB^{-1}) \in \{-1,+1\}$, und damit $AB^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.

Aufgabe 47.

(1) Ist richtig. Denn aus $0 \neq \det(A^m) = (\det A)^m$ folgt $0 \neq \det A$.

(2) Ist falsch.

Erstes Beispiel: $A = B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\lambda = \mu = 1$ ergeben $\det(\lambda A + \mu B) = 4$, aber $\lambda \det A + \mu \det B = 2$.

Zweites Beispiel: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda = 2$ und $\mu = 0$ ergeben $\det(\lambda A) = 4$, aber $\lambda \det A = 2$.

(3) Ist falsch. Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, so wird $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, was bei keiner Blockeinteilung eine obere Blockdreiecksmatrix ist. (Für A und B mit denselben Blockgrößen ist die Aussage richtig.)

(4) Ist richtig. Denn aus $\det A = 1$ und $\det B = 1$ folgt $\det(AB^{-1}) = (\det A)(\det B)^{-1} = 1$.

(5) Ist falsch. So etwa haben für $K = \mathbf{F}_2$ und $n = 2$ die beiden Permutationsmatrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ jeweils Determinante 1, und $2 \neq 2!/2 = 1$. (Im Spezialfall $K = \mathbf{R}$ und $n \geq 2$ trifft die Aussage hingegen zu.)