Blatt #10, 19. Dez. 2002

Aufgabe 39.

(1) Es wird A geeignet umgeformt zu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}$. Damit ist $\operatorname{rk} A = 1$ falls $s = -1$ und $\operatorname{rk} A = 2$ sonst.

(2) Es wird A geeignet umgeformt zu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & -s & is \\ 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix}$. Damit ist $\operatorname{rk} A = 2$ falls $s = 0$ oder $s = 1$ und $\operatorname{rk} A = 3$ sonst.

(3) Es wird A geeignet umgeformt zu $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1+\alpha \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s^3-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist $\operatorname{rk} A = 3$ falls $s = 0$, $\operatorname{rk} A = 2$ falls $s = \alpha$ oder $s = \alpha + 1$ und $\operatorname{rk} A = 1$ falls $s = 1$.

Aufgabe 40.

(1) Es ist A singulär für $a = -3$. Für $a \neq -3$ wird $(A|E)$ umgeformt zu $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a+1}{a+3} & \frac{2}{a+3} & -\frac{2}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1+2a}{a+3} & \frac{a-2}{a+3} & \frac{5}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+3} & -\frac{1}{a+3} & \frac{1}{a+3} \end{array}\right)$.

Damit ist $A^{-1} = \frac{1}{a+3} \begin{pmatrix} a+1 & 2 & -2 \\ -(1+2a) & a-2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Zur Probe sehen wir $AA^{-1} = E$ oder $A^{-1}A = E$.

(2) Es ist A regulär, falls $a, d, f \neq 0$. In diesem Fall wird $(A|E)$ umgeformt zu $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{array}\right)$.

Damit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$.

(3) Es ist A regulär und $(A|E)$ wird umgeformt zu $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \beta+1 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \beta & \beta^2+1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Damit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} \beta+1 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \beta^2+1 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \beta & \beta \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 41.

(1) Diese Aussage gilt i.a. nicht. Denn z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$, daß $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\operatorname{rk} A^2 = 1$, aber $A^3 = 0 \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{rk} A = 0$.

(2) Diese Aussage ist i.a. falsch. Denn z.B. ist für $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ jeweils aus $\mathbf{R}^{3\times 3}$ $\operatorname{rk}(E + A) = \operatorname{rk}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = 3 = n$.

(3) Für die Direktheit der Summe ist hier zu zeigen, dass $\operatorname{Kern}(x \mapsto Ax) \cap \operatorname{Im}(x \mapsto A^t x) = 0$ gilt. Sei also $y = A^t x \in \operatorname{Im}(x \mapsto A^t x)$ und gleichzeitig $y \in \operatorname{Kern}(x \mapsto Ax)$, d.h. $Ay = A(A^t x) = 0$. Daraus folgt: $x^t A A^t x = 0$, was äquivalent ist zu $(A^t x)^t A^t x = 0$. Da $A^t x \in \mathbf{R}^n$, folgt hieraus $y = A^t x = 0$. Also gilt: falls ein Element sowohl im Kern als auch im Bild liegt, kann es nur 0 sein.

Bleibt noch zu zeigen, dass die Summe gleich $\mathbf{R}^n$ ist. Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Kern}(x \mapsto Ax) \oplus \operatorname{Im}(x \mapsto A^t x)) &= \dim \operatorname{Kern}(x \mapsto Ax) + \dim \operatorname{Im}(x \mapsto A^t x) \\ &= \dim \operatorname{Kern}(x \mapsto Ax) + \operatorname{rk} A^t \\ &= \dim \operatorname{Kern}(x \mapsto Ax) + \operatorname{rk} A \\ &= \dim \operatorname{Kern}(x \mapsto Ax) + \dim \operatorname{Im}(x \mapsto Ax) \\ &= n\,. \end{aligned}$$

(4) Sei $f : x \mapsto Ax$. Ist $\operatorname{rk} A^m = \operatorname{rk} A^{m+1}$, so ist $\operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^{m+1}$, d.h. $f^m(K^n) = f^{m+1}(K^n)$. Anwenden von f auf beide Seiten liefert $f^{m+1}(K^n) = f^{m+2}(K^n)$, und somit $\operatorname{rk} A^{m+1} = \operatorname{rk} A^{m+2}$.

(5) Analog zu (3) ist zu zeigen, dass $\mathrm{Kern}(x \mapsto A^m x) \cap \mathrm{Im}(x \mapsto A^m x) = 0$. Mit (2) folgt, dass $\mathrm{rk}\, A^m = \mathrm{rk}\, A^{m+1} = \cdots = \mathrm{rk}\, A^{2m}$, also $\dim \mathrm{Im}\, A^m = \dim \mathrm{Im}\, A^{2m}$. Mit der Dimensionsformel folgt dann $\dim \mathrm{Kern}\, A^m = \dim \mathrm{Kern}\, A^{2m}$ und somit wegen $\mathrm{Kern}\, A^{2m} \geq \mathrm{Kern}\, A^m$ auch $\mathrm{Kern}\, A^m = \mathrm{Kern}\, A^{2m}$.
Sei nun $y = A^m x \in \mathrm{Im}\, A^m$ gewählt und gelte gleichzeitig $y \in \mathrm{Kern}\, A^m$. Damit folgt $A^m y = A^m(A^m x) = A^{2m} x = 0$, d.h. $x \in \mathrm{Kern}\, A^{2m} = \mathrm{Kern}\, A^m$. Also gilt $y = A^m x = 0$ und somit ist nur 0 in obigem Schnitt enthalten.

Aufgabe 42.

(1) Für $A \in K^{3\times 3}$ gilt nach Leibniz:

$$\begin{aligned}\det A = \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon_\sigma \prod_{i \in [1,3]} a_{\sigma(i),i} \quad &= \quad a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ &\quad\; - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}\ .\end{aligned}$$

(2) Für die Auswertung der Leibnizschen Formel benötigt man $(n! - 1)$ Additionen und $(n-1)n!$ Multiplikationen (oder aber $n \cdot n!$, wenn man ε_σ nicht als Vorzeichen, sondern als Faktor ansieht).

Aufgabe 43.

Diese Aussage ist i.a. falsch. Z.B. ist für $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = \det(XE - A) = X^3 - X^2 - X + 1$. Damit nimmt $\chi_A'(X) = 3X^2 - 2X - 1$ an der Stelle 0 den Wert -1 an.