Blatt #10, 19. Dez. 2002 Abgabe bis 9. Jan. 2003, 15 Uhr 30, Briefkasten vor H3
Matthias Künzer

Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 39 (9 Punkte).

Seien K ein Körper, $m, n \geq 1$ und $A \in K^{m \times n}$. Bestimme den Rang $\operatorname{rk} A$ in Abhängigkeit von $s \in K$, d.h. ggf. mit Fallunterscheidungen.

(1) $K = \mathbf{R}$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & s \end{smallmatrix}\right)$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & i \\ -i & i & s \\ 1-s & -1 & i \end{smallmatrix}\right)$.

(3) $K = \mathbf{F}_4$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha & \alpha+1 & s^3 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha+1 & s & \alpha \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 40 (9 Punkte).

Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und $A \in K^{n \times n}$. Gib an, für welche Parameter $a, b, c, d, e, f \in K$ die Matrix A invertierbar ist, und bestimme diesenfalls ihre Inverse A^{-1}. Die Probe zählt jeweils 0.5 Punkte.

(1) $K = \mathbf{R}$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{smallmatrix}\right)$.

(2) K beliebig, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right)$.

(3) $K = \mathbf{F}_8$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & \beta & \beta^2 \\ 1 & 0 & \beta^2+1 & \beta+1 \\ 1 & \beta & \beta & \beta^2+\beta+1 \end{smallmatrix}\right)$ (kein Parameter).

Aufgabe 41 (5 Punkte).

Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeige, oder widerlege mittels Gegenbeispiel.

(1) Wir haben $\operatorname{rk}(A^2) = \operatorname{rk}(A^3)$.

(2) Der Rang der Summe zweier verschiedener Permutationsmatrizen in $K^{n \times n}$ ist $< n$.

(3) Ist $K = \mathbf{R}$, so ist $\mathbf{R}^n = \operatorname{Kern}(x \longmapsto Ax) \oplus \operatorname{Im}(x \longmapsto A^{\mathrm{t}}x)$. (Hinweis: $x^{\mathrm{t}}AA^{\mathrm{t}}x \geq 0$.)

(4) Ist $\operatorname{rk} A^m = \operatorname{rk} A^{m+1}$ für ein $m \geq 0$, so ist $\operatorname{rk} A^{m+1} = \operatorname{rk} A^{m+2}$.

(5) Ist $\operatorname{rk} A^m = \operatorname{rk} A^{m+1}$ für ein $m \geq 0$, so ist $K^n = \operatorname{Kern}(x \longmapsto A^m x) \oplus \operatorname{Im}(x \longmapsto A^m x)$.

Aufgabe 42 (4 Punkte).

Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n \times n}$.

(1) Leite im Falle $n = 3$ eine Formel für $\det A$ in der Form $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + - \cdots$ aus der Leibnizschen Formel her.

(2) Wieviele Additionen und wieviele Multiplikationen sind nötig, um die Leibnizsche Formel für ein allgemeines $n \geq 1$ auszuwerten (vorausgesetzt, man vereinfacht die Rechnung nicht)?

Aufgabe 43 (2 Punkte).

Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n \times n}$. Sei $\chi_A(X) := \det(XE - A) \in K[X]$ das *charakteristische Polynom* von A. Zeige oder widerlege: Gibt es $i, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$ und $a_{i,i} = a_{j,j}$, so hat $\chi'_A(X)$ eine Nullstelle bei $a_{i,i}$.