Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

Aufgabe 1 (6 Punkte). Gegeben seien die Abbildungen (X, Y, Z, W Mengen)

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W.$$

Entscheide, ob folgende Aussagen zutreffen oder nicht. Beweise, oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels.

(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
(2) f injektiv, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.
(3) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow g$ injektiv und f injektiv.
(4) $f^{-1}(f(U)) = U$ für alle $U \subseteq X$.
(5) $f(f^{-1}(V)) = V$ für alle $V \subseteq Y$.
(6) Ist $Y = \mathfrak{P}(X)$, so ist f nicht surjektiv.
Hinweis: Nehme an, $\{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathfrak{P}(X)$ liegt im Bild von f.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien X und Y Mengen mit $\#X = n$ und $\#Y = m$ Elementen ($n, m \in \mathbf{N}$). Gib die folgenden Größen (jeweils mit Begründung) an.

(1) Anzahl der Elemente in der Potenzmenge von X, d.h. $\#\mathfrak{P}(X)$.
(2) Anzahl der Abbildungen von X nach Y.
(3) Anzahl der injektiven Abbildungen von X nach Y.
(4) Anzahl der Bijektionen von X nach X.

Aufgabe 3 (1+1+1+2 Punkte).

(1) Gib eine Relation auf $\mathbf{Z}$ an, die reflexiv und transitiv, nicht aber symmetrisch ist.
(2) Gib eine Relation auf $\mathbf{Z}$ an, die reflexiv und symmetrisch, nicht aber transitiv ist.
(3) Gib eine Relation auf $\mathbf{Z}$ an, die symmetrisch und transitiv, nicht aber reflexiv ist.
(4) Sei auf $X := \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ eine Relation definiert durch

$$(x, x') \sim (y, y') \Leftrightarrow xy' = yx'.$$

Zeige, daß $(\sim)$ eine Äquivalenzrelation ist, und gib ein Repräsentantensystem an (Hinweis: „gekürzte Brüche"). Gib eine Bijektion

$$X/\!\sim \ \xrightarrow{\sim} \ \mathbf{Q}$$

an.

Aufgabe 4 (3 Punkte).

(1) Sei eine endliche Gruppe G mit einer Untergruppe $U \leqslant G$ gegeben. Zeige, daß auf G durch

$$g \sim h \Leftrightarrow \text{ es existiert ein } u \in U \text{ mit } gu = h$$

ein Äquivalenzrelation definiert ist. Betrachte die disjunkte Zerlegung in Äquivalenzklassen und zeige

$$\#U \text{ teilt } \#G.$$

(2) Für eine Gruppe G gelte $g^2 = 1$ für alle $g \in G$. Zeige, daß G dann abelsch ist.
(3) Sei eine Menge G mit einer Multiplikation $(\cdot)$ gegeben, die (G 1) und (G 2r, 3r) erfüllt:
(G 2r) Es existiert ein $e_r \in G$ mit $x \cdot e_r = x$ für alle $x \in G$ (rechtsneutrales Element).
(G 3r) Für alle $x \in G$ existiert ein $y_r \in G$ mit $x \cdot y_r = e_r$ (rechtsinverses Element).
(Es wird keine Eindeutigkeit gefordert.) Zeige, daß dann (G 2) und (G 3) gelten. Hinweis: Ist x_r^{-1} rechtsinvers zu x , so zeige zunächst $x_r^{-1}x = e_r$; betrachte hierzu $x_r^{-1}xx_r^{-1}(x_r^{-1})_r^{-1}$. Zeige dann $e_r x = x$; schreibe hierzu $e_r = xx_r^{-1}$.