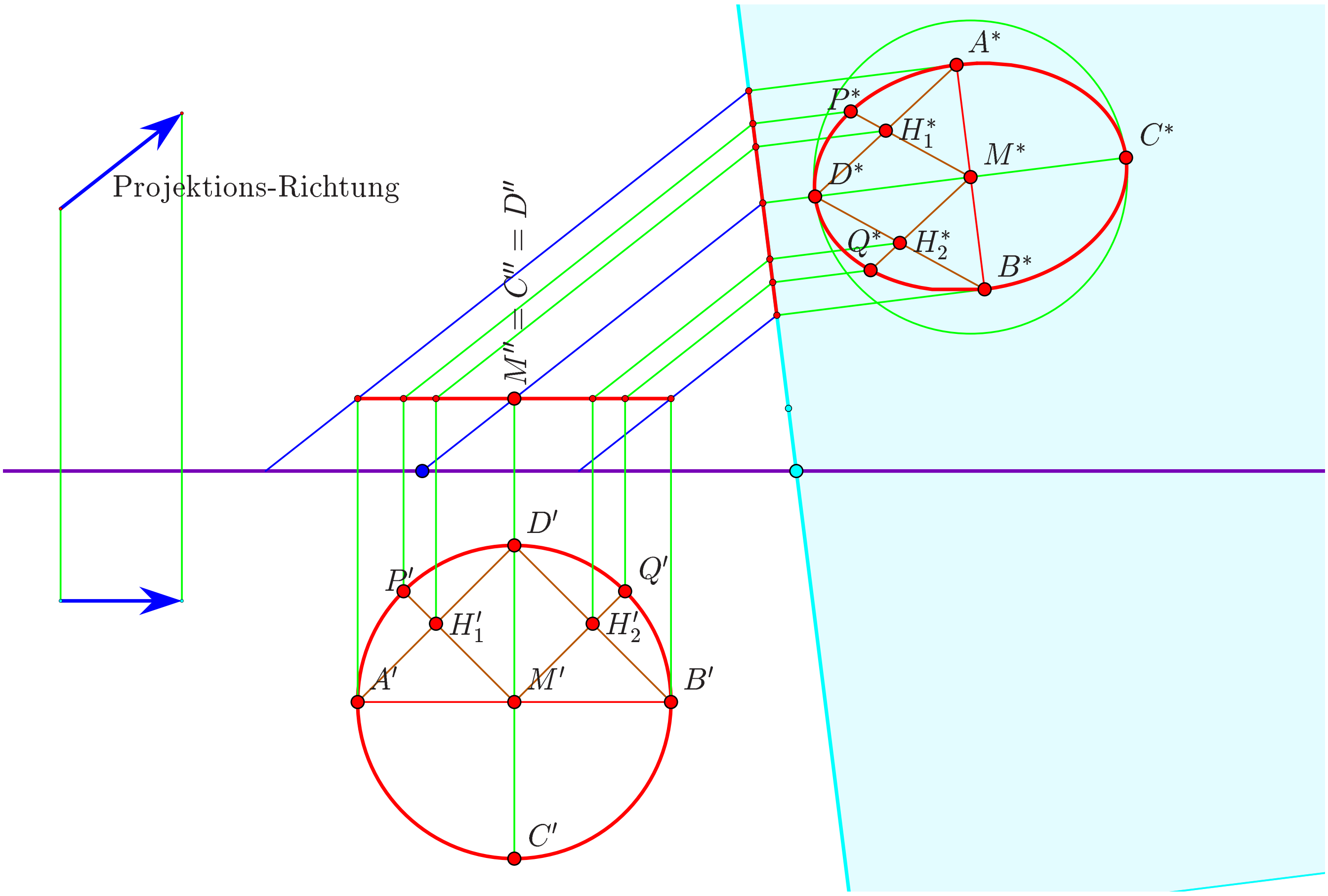
Bilder von Kreisen unter Parallel-Projektion

Hier wird einerseits in Grund- und Aufriss die Parallel-Projektion eines waagrecht liegenden Kreises dargestellt: Die Projektionsrichtung liegt parallel zur Aufriss-Ebene, die Bildtafel steht senkrecht zur Aufriss-Ebene.

Andererseits wurde die Bildtafel so um 90° geklappt, dass sie in die Aufriss-Ebene fällt.

Für einige Punkte X auf dem Kreis ist die Konstruktion der Bilder X^* angedeutet.



Wegen ihrer speziellen Lage zur Bildtafel werden die Radien MC und MD längentreu abgebildet. Zur Abbildung der Punkte A und B werden die Projektions-Strahlen im Aufriss (und in der umgeklappten Bildtafel) verfolgt; die Lage der Geraden $A^* B^*$ ist wieder wegen der speziellen Wahl der Projektions-Richtung bekannt.

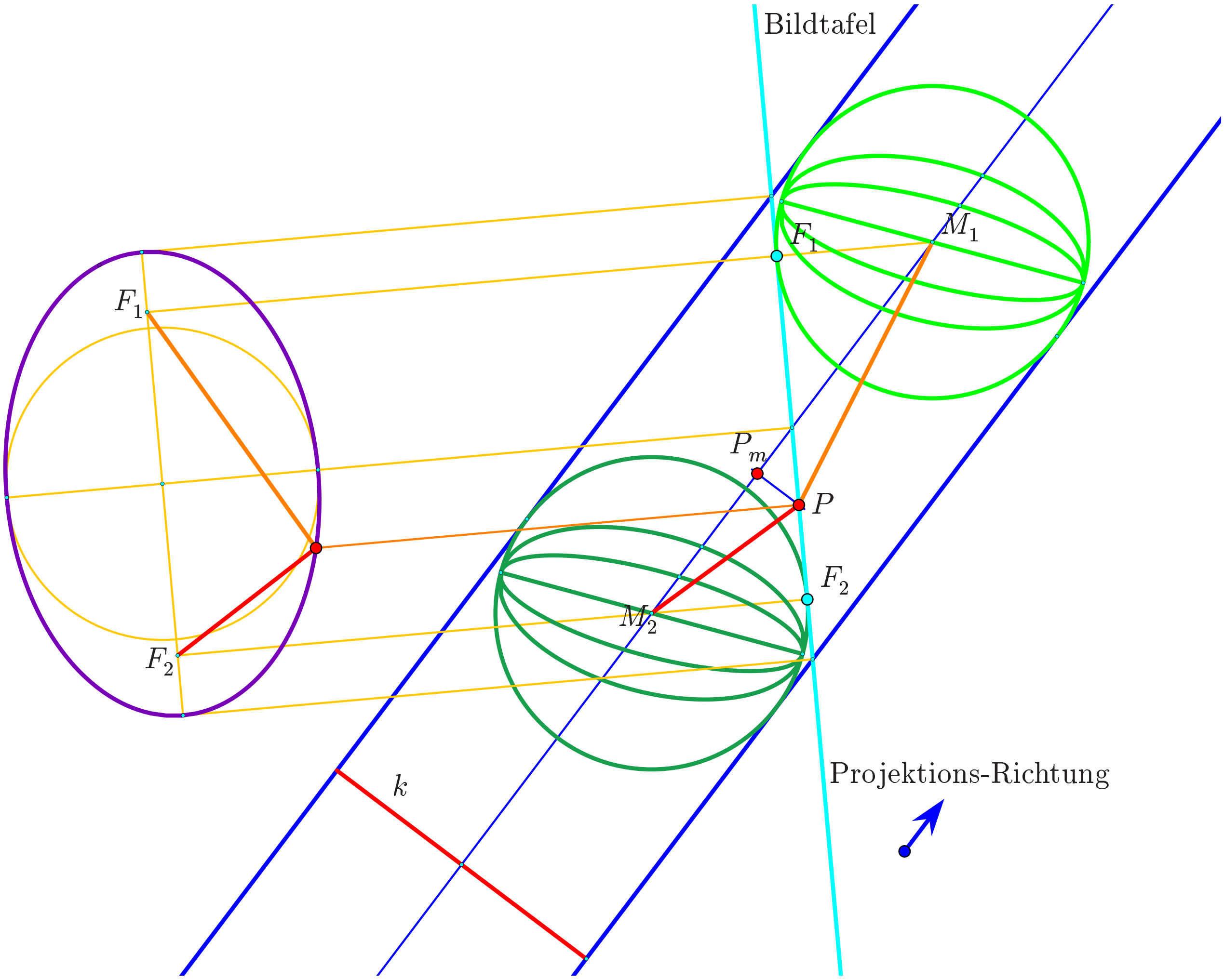
Zur Konstruktion der Bilder P^* und Q^* wurden die Hilfspunkte H_1 und H_2 auf den Strecken AD bzw. BD verwendet.

In Koordinaten lässt sich jede Parallel-Projektion zwischen zwei Ebenen des Raumes als Affinität beschreiben: Dabei geht die Gleichung eines Kreises in die Gleichung der durch affine Verzerrung gegebenen Ellipse über.

email: stroppel@mathematik.uni-stuttgart.de

Dandelinsche Kugeln

Liegt der abzubildende Kreis k orthogonal zur Projektionsrichtung, so kann man die als Bild entstehende Ellipse über ihre Brennpunkte auch elementar geometrisch beschreiben: Dazu benutzt man nach **Dandelin** Kugeln, die den durch die Projektions-Strahlen der Kreispunkte bestimmten senkrechten Kreiszylinder sowie die Bildtafel berühren. Die Berührpunkte dieser Kugeln mit der Bildtafel sind die Brennpunkte der Ellipse.



Für jeden Punkt P auf dem Schnitt des Zylinders mit der Bildtafel (also im Bild des Kreises) fällen wir das Lot auf den Punkt P_m auf der Symmetrieachse des Zylinders.

Jetzt bestimmen wir die Abstände F_1P und F_2P nach Pythagoras:

$$\begin{array}{lrcll} \text{Es gilt} & (F_1P)^2 & = & (M_1P)^2 - (M_1F_1)^2 & \text{und} \\ & (F_2P)^2 & = & (M_2P)^2 - (M_2F_2)^2\,, & \\ \text{andererseits} & (M_1P)^2 & = & (M_1P_m)^2 + (P_mP)^2 & \text{und} \\ & (M_2P)^2 & = & (M_2P_m)^2 + (P_mP)^2\,. & \end{array}$$

Da M_1F_1, M_2F_2 und P_mP alle gleich dem Radius des Zylinders sind, erhalten wir $F_1P = M_1P_m$ und $F_2P = M_2P_m$, woraus folgt, dass $F_1P + F_2P = M_1M_2$ konstant ist: Dies ist die gesuchte Brennpunkt-Eigenschaft.

Will man Bilder von Kreisen verstehen, die nicht orthogonal zur Projektions-Richtung liegen, muss man wieder auf affine Abbildungen zurückgreifen.