Ü 0 Es sei A eine F-Algebra mit Multiplikation μ.
Zeigen Sie: $\forall a \in A : \mu(a,0) = 0 = \mu(0,a)$.

Ü 1 Zeigen Sie: Ist L eine Lie-Algebra, so gilt $\forall x, y \in L : [x,y] = -[y,x]$.

Ü 2 *Alle zweidimensionalen Lie-Algebren*
Beweisen Sie: Ist L eine Lie-Algebra mit $\dim L = 2$, so gibt es $a, b \in L$ derart, dass $L = Fa \oplus Fb$ und $[a,b] \in \{0, a\}$.
Verifizieren Sie, dass jede dieser Möglichkeiten für $[a,b]$ tatsächlich eine Lie-Algebra liefert.

Ü 3 *Derivationen*
Es sei A eine F-Algebra. Zeigen Sie: $\mathrm{Der}(A)$ ist eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(A)$.

Ü 4 *Quotienten*
Es sei A eine F-Algebra mit Multiplikation μ, und es sei I ein Ideal von A. Zeigen Sie: durch $\mu'(a+I, b+I) = \mu(a,b) + I$ ist eine F-bilineare Multiplikation

$$\mu' : A/I \times A/I \to A/I$$

(wohl-)definiert. Vererben sich Assoziativität oder die Jacobi-Identität?

Ü 5 Es sei $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von F-Algebren. Zeigen Sie: $\varphi(A) \leq B$.

Ü 6 Es sei A eine F-Algebra. Beweisen Sie:

ⓐ $U \leq A \trianglerighteq I \implies U + I \leq A$.

ⓑ $(\forall \lambda \in \Lambda : U_\lambda \leq A) \implies \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \leq A$.

ⓒ $(\forall \lambda \in \Lambda : I_\lambda \trianglelefteq A) \implies \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \trianglelefteq A \trianglerighteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Ü 7 *Zentral- und Kommutator-Reihen*
Es sei L eine Lie-Algebra. Wir definieren induktiv $L^{(0)} := L =: L^0$ und $L^{(n+1)} := [L^{(n)}, L^{(n)}]$ sowie $L^{n+1} := [L, L^n]$. Zeigen Sie, dass gilt:

ⓐ $L^{n+1} = [L^n, L]$.

ⓑ $I \trianglelefteq L \implies \forall n \in \mathbb{N} : I^{(n)} \trianglelefteq L \trianglerighteq I^n$.

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N} : L^{(n)} \trianglelefteq L \trianglerighteq L^n$.

ⓓ $\mathrm{Z}(L) \trianglelefteq L$.

Ü 8 Bestimmen Sie $\mathrm{Der}(A)$ für jede der folgenden F-Algebren:

ⓐ $A = F$ (mit der alten Multiplikation).

ⓑ $A = F1 \oplus F\varepsilon$ mit $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon \cdot 1$, $\varepsilon \cdot \varepsilon = 0$.

ⓒ $A = \mathbb{C}$, mit $F = \mathbb{R}$ und der üblichen Multiplikation.

Ü 9 Bestimmen Sie $\mathrm{ad}\,(L)$ für alle Lie-Algebren L mit $\dim L \leq 2$.

Ü 10 *Struktur-Konstanten*
Es sei A eine F-Algebra mit Multiplikation μ, und es sei B eine F-Basis für den Vektorraum A. Zeigen Sie, dass μ durch die Familie $(\mu(b,c))_{(b,c)\in B\times B}$ festgelegt ist.

Ü 11 Bestimmen Sie $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_2F)$ und $\mathrm{Z}(\mathfrak{sl}_2F)$.

Ü 12 Es sei F ein Körper, und n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

ⓐ $\mathfrak{sl}_nF := \left\{x \in \mathfrak{gl}_nF \mid \mathrm{Spur}(x) = 0\right\} \le \mathfrak{gl}_nF$, und es gilt $(\mathfrak{gl}_nF)' \le \mathfrak{sl}_nF$.

ⓑ $\mathfrak{o}_nF := \left\{x \in \mathfrak{gl}_nF \mid xs = -sx^{\mathsf{T}}\right\} \le \mathfrak{sl}_nF$,
dabei sei s eine der symmetrischen Blockmatrizen
$\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & I \\ & I & \end{pmatrix}$ (mit der $m\times m$-Einheitsmatrix I),
je nachdem, ob $n = 2m$ gerade oder $n = 2m+1$ ungerade ist.

ⓒ $\mathfrak{sp}_{2n}F := \left\{x \in \mathfrak{gl}_{2n}F \mid xs = -sx^{\mathsf{T}}\right\} \le \mathfrak{sl}_{2n}F$,
wobei s die schiefsymmetrische Blockmatrix $\begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix}$ bezeichne.

Ü 13 Beweisen Sie: Für jeden Körper F, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist, ist die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2F$ einfach.
Hinweis: Betrachten Sie die Elemente $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2F$.

Ü 14 Zeigen Sie: Eine Lie-Algebra L ist genau dann halbeinfach, wenn sie kein von $\{0\}$ verschiedenes *auflösbares* Ideal enthält.

Ü 15 Es sei L eine Lie-Algebra über F. Beweisen Sie:

ⓐ L abelsch $\implies$ L nilpotent $\implies$ L auflösbar

ⓑ L einfach $\implies$ L halbeinfach

ⓒ L einfach $\implies$ $L' = L$

Geben Sie Beispiele von nilpotenten nicht abelschen, auflösbaren nicht nilpotenten, einfachen, und schließlich halbeinfachen nicht einfachen Lie-Algebren an.

Ü 16 Verifizieren Sie, dass $L := \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} X \in F^{a\times b}, \quad Y \in F^{a\times(n-b)} \\ Z \in F^{(n-a)\times(n-b)} \end{matrix} \right\}$
für $a \le b$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_nF$ bildet. Ist L auflösbar? Ist L halbeinfach?

Ü 17 Es sei F der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{sl}_2F)$.

Ü 18 Es sei F ein Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik.
Vergleichen Sie $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{sl}_2F)$ und $\mathfrak{o}_3F$.

Ü 19 Gibt es nicht abelsche assoziative Lie-Algebren?

Im Folgenden sei stets L eine Lie-Algebra.

Ü 20 Zeigen Sie: L ist auflösbar $\iff$ $\operatorname{ad}(L)$ ist auflösbar.

Ü 21 Zeigen Sie: L ist nilpotent $\iff$ $\operatorname{ad}(L)$ ist nilpotent.

Ü 22 Beweisen Sie:

(a) Ist L nilpotent, und gilt $M \le L \trianglerighteq I$, so sind M und L/I nilpotent.

(b) Sind I und J nilpotente Ideale von L, so ist auch $I + J$ ein nilpotentes Ideal von L.
Hinweis: Zeigen Sie $(I + J)^{n+1} \subseteq I^{n+1} + J^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} I^k \cap J^{n-k}$.

Ü 23 Zeigen Sie: Ist L eine nicht halbeinfache Lie-Algebra endlicher Dimension, so gibt es ein *minimales abelsches* Ideal M in L; das heißt:
$M \trianglelefteq L$, $M \neq \{0\}$, M abelsch, $(N \trianglelefteq L, N < M) \implies N = \{0\}$.

Ü 24 Finden Sie Beispiele von Lie-Algebren mit Ideal I und Unteralgebra U derart, dass I und U beide nilpotent sind, aber $I + U$ nicht nilpotent ist.

Ü 25 *ein (zu) großes Produkt*
Für $n \in \mathbb{N}$ sei D_n die Menge der strikt oberen Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{gl}_n F$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwar D_n nilpotent, aber $D := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} D_n$ (mit komponentenweiser Multiplikation) nicht einmal auflösbar ist. Bestimmen Sie $\operatorname{Rad}(D)$.

Ü 26 Zeigen Sie: Es gibt Lie-Algebren mit nicht auflösbarem Radikal.

Ü 27 *das Nil-„Radikal“*
Wir setzen $\operatorname{NRad}(L) := \sum \left\{ N \trianglelefteq L \mid N \text{ nilpotent} \right\}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{NRad}(L) \trianglelefteq L$.

(b) $\dim \operatorname{NRad}(L) < \infty \implies \operatorname{NRad}(L)$ nilpotent.

(c) Es gibt Lie-Algebren L mit $\dim \operatorname{NRad}(L) < \infty$ so, dass $\operatorname{NRad}(L/\operatorname{NRad}(L)) \neq \{0\}$.

Ü 28 Der Körper F habe die Charakteristik 2.

(a) Ist $\mathfrak{sl}_2 F$ auflösbar?

(b) Ist $\mathfrak{sl}_2 F$ nilpotent?

Ü 29 *aufsteigende Zentralreihe*
Ausgehend von $\mathrm{Z}^0(L) := \{0\}$ definieren wir induktiv $\mathrm{Z}^{n+1}(L) := \pi^{\leftarrow}_{\mathrm{Z}^n(L)}\left(\mathrm{Z}(L/\mathrm{Z}^n(L))\right)$.
Zeigen Sie: L ist genau dann nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl c mit $\mathrm{Z}^c(L) = L$ gibt.

Ü 30 *direkte Summe / direktes Produkt*
Seien $L_1, \dots, L_n$ Lie-Algebren. Auf dem Vektorraum $L := L_1 \times \cdots \times L_n$ sei durch

$$[(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)] := ([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$$

die zweistellige Operation $[\cdot, \cdot]$ definiert. Zeigen Sie:

ⓐ $(L, [\cdot, \cdot])$ ist eine Lie-Algebra.

ⓑ L ist genau dann auflösbar (nilpotent), wenn für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Lie-Algebra L_j auflösbar (nilpotent) ist.

Bestimmen Sie $\operatorname{Rad}(L)$ in Abhängigkeit von $\operatorname{Rad}(L_1), \dots, \operatorname{Rad}(L_n)$.

Ü 31 *(äußere) semidirekte Summe*
Es seien S, R Lie-Algebren, und $\alpha \colon S \to \operatorname{Der}(R)$ sei ein Homomorphismus. Auf dem Vektorraum $L := S \times R$ setzen wir

$$[(s, r), (u, v)] := ([s, u], \alpha(s)v - \alpha(u)r + [r, v]) .$$

Zeigen Sie: L wird so zu einer Lie-Algebra, und es gilt $\{0\} \times R \trianglelefteq L \geq S \times \{0\}$.
(Diese Lie-Algebra heißt *semidirekte Summe von S und R bezüglich α*, und wird mit $S \underset{\alpha}{\ltimes} R$ oder $R \underset{\alpha}{\rtimes} S$ bezeichnet.)

Ü 32 *(innere) semidirekte Summe*
Sei I ein Ideal einer Lie-Algebra L. Zeigen Sie:
Gibt es eine Unteralgebra $U \leq L$ mit $L = U \oplus I$ (als Vektorraum), so ist L isomorph zur semidirekten Summe von U und I bezüglich $\operatorname{ad}(\cdot)|_I^I$.

Ü 33 *die Lie-Algebra der affinen Transformationen*
Zerlegen Sie $L = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; A \in \mathfrak{gl}_n F, v \in F^n \right\}$ als semidirekte Summe.

Ü 34 *eine nilpotente Lie-Algebra*
Läßt sich die Unteralgebra

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in F \right\}$$

der strikt oberen Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{gl}_3 F$ als semidirekte Summe zerlegen?

Ü 35 *irreduzible Darstellungen abelscher Lie-Algebren*

Es sei A eine abelsche Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F mit $\mathrm{char}(F) = 0$, und $\varphi\colon A \to \mathfrak{gl}_n F$ sei ein Homomorphismus derart, dass $\varphi(A)$ keinen echten nichttrivialen Unterraum invariant lässt. Zeigen Sie: $n = 1$.

Ü 36 *vom Nutzen des algebraischen Abschlusses*

Was passiert in Aufgabe Ü 35, wenn man F durch $\mathbb{R}$ ersetzt?

Ü 37 *eine kleine auflösbare Lie-Algebra*

Finden Sie in der Lie-Algebra der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{gl}_2 F$ eine Fahne, die aus Idealen besteht.

Ü 38 *Normalisatoren in nilpotenten Lie-Algebren*

Es sei L eine nilpotente Lie-Algebra. Zeigen Sie:
Für jede echte Unteralgebra $U < L$ gilt $U \lneq \mathrm{N}_L(U)$.

Ü 39 *ein Nilpotenz-Kriterium*

Es sei L eine Lie-Algebra mit einem Ideal I derart, dass L/I nilpotent und $\dim(L/I) < \infty$.
Außerdem sei $\mathrm{ad}\,(x)\,|_I^I$ für jedes Element $x \in L$ nilpotent.
Zeigen Sie, dass dann auch die Lie-Algebra L nilpotent ist.

Ü 40 *eine Serie halbeinfacher Lie-Algebren*
Zeigen Sie: Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik 0 und jede natürliche Zahl n ist $\mathfrak{sl}_n F$ halbeinfach.

Hinweis: Zeigen Sie $\mathrm{Rad}(\mathfrak{sl}_n F) = \mathrm{Z}(\mathfrak{sl}_n F) = \{0\}$ mit Hilfe des Satzes von Lie.

Ü 41 Es sei $\dim V < \infty$ und $x \in \mathfrak{gl}(V)$ diagonalisierbar. Zeigen Sie: auch $\mathrm{ad}\,(x)$ ist diagonalisierbar.

Ü 42 *das allgemeine Cartan-Kriterium*
Begründen Sie detailliert: Gilt in einer Lie-Algebra L endlicher Dimension für $x \in L'$ und $y \in L$ stets $\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}\,(x) \cdot \mathrm{ad}\,(y)) = 0$, so ist L auflösbar.

Ü 43 Beweisen Sie die Umkehrung des Cartan-Kriteriums:
Ist F algebraisch abgeschlossen und $L \leq \mathfrak{gl}_n F$ auflösbar, so gilt

$$\forall x \in L' \quad \forall y \in L : \quad \mathrm{Spur}(xy) = 0\,.$$

Ü 44 Verifizieren Sie, dass für die Killing-Form κ einer Lie-Algebra L stets gilt:

$$\forall x, y, z \in L : \kappa\left([x, y], z\right) = \kappa\left(x, [y, z]\right).$$

Begründen Sie, warum daraus $I^{\perp_\kappa} \trianglelefteq L$ für jedes Ideal $I \trianglelefteq L$ folgt.

Ü 45 *„kompakte“ Lie-Algebren*
Zeigen Sie: Ist die Killing-Form einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra *anisotrop* (d.h.: kein Element außer 0 steht auf sich selbst senkrecht), so gibt es zu jedem Ideal ein komplementäres Ideal, und die ALgebra ist direkte Summe einfacher Ideale.

Bemerkung: Lie-Algebren zu halbeinfachen kompakten Lie-Gruppen haben diese Eigenschaft.

Ü 46 Bestimmen Sie die Killing-Form der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2 F$. Wann ist diese ausgeartet?

Ü 47 Bestimmen Sie $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{sl}_3 F)$. (Nutzen Sie dabei geeignete Automorphismen der Algebra!) Bestimmen Sie die Killing-Form der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3 F$. Wann ist diese ausgeartet?

Ü 48 Finden Sie Beispiele für Endomorphismen $u, v, x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ mit

- **a** $\mathrm{Spur}(uv) = 0$ aber $\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}\,(u)\ \mathrm{ad}\,(v)) \neq 0$.
- **b** $\mathrm{Spur}(xy) \neq 0$ aber $\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}\,(x)\ \mathrm{ad}\,(y)) = 0$.

Ü 49 Bestimmen Sie die Killing-Form der Lie-Algebra

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in F \right\}$$

der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{gl}_2 F$.

Ü 50 Es sei V ein F-Vektorraum, und $\beta\colon V^2 \to F$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie: Für jeden Untervektorraum $W \leq V$ mit $W \cap W^\perp$ und $\dim W < \infty$ gilt $V = W \oplus W^\perp$.

Hinweis: Betrachten Sie eine Basis $b_1, \dots, b_t$ von W und die lineare Abbildung $\lambda\colon V \to F^t\colon v \mapsto (\beta(b_1, v), \dots, \beta(b_t, v))$.

Ü 51 Es sei L eine Lie-Algebra, und V, W seien L-Moduln. Zeigen Sie, dass durch

$$x.f := \big(v \mapsto -f(x.v)\big)$$
$$x.(v, w) := (x.v, x.w)$$
$$x.(v \otimes w) := x.v \otimes w - v \otimes x.w$$
$$x.A := \big(v \mapsto x.Av - A(x.v)\big)$$

die Vektorräume V^*, $V \times W$, $V \otimes W$, $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ zu L-Moduln werden.

Ü 52 Zeigen Sie: Ist V ein L-Modul, so macht $[(x, v), (y, w)] := \big([x, y], x.w - y.v\big)$ den Vektorraum $L \times V$ zu einer Lie-Algebra.

Ü 53 Beweisen Sie, dass die Vektorräume $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ und $V \otimes W^*$ isomorph sind.

Ü 54 Es sei V ein Vektorraum endlicher Dimension, und $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ mit $[x, y] = 0$. Zeigen Sie: Ist y nilpotent, so auch xy, und es gilt $xy \in \mathfrak{sl}(V)$.

Ü 55 Beweisen Sie (3.1‴) der Vorlesung.

Ü 56 Es sei L eine Lie-Algebra, und I ein halbeinfaches Ideal in L.
Finden Sie (mit Hilfe der Killing-Form) ein Ideal $J \trianglelefteq L$ mit $L = I \oplus J$.

Ü 57 Es sei L eine halbeinfache Lie-Algebra. Beweisen Sie: $\mathrm{Der}(L) = \mathrm{ad}\,(L) \cong L$.
Hinweis: Betrachten Sie die semidirekte Summe $F \underset{\delta}{\ltimes} L$ für $\delta : F \to \mathrm{Der}(L)$, oder benutzen Sie, dass $\mathrm{ad}\,(L)$ ein Ideal in $\mathrm{Der}(L)$ ist.

Ü 58 Es sei F algebraisch abgeschlossen, und $L \leq \mathfrak{gl}_n F$. Zeigen Sie: Ist L halbeinfach, so liegen für jedes Element $x \in L$ auch x_s und x_n in L.
Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass man auf die Bedingung „halbeinfach“ nicht einfach verzichten kann.

Ü 59 Zeigen Sie, dass die Spurform β_φ zu einer linearen Darstellung $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}_n F$ „assoziativ“ ist, das heißt:

$$\beta_\varphi\big([x, y], z\big) = \beta_\varphi\big(x, [y, z]\big).$$

Ü 60 *simultan diagonalisiert*
Es sei L eine halbeinfache Lie-Algebra, und T eine torale Unteralgebra. Zeigen Sie:
Es gibt eine Basis von L, bezüglich der alle Elemente von $\operatorname{ad}(T)$ Diagonal-Gestalt haben.

Im Folgenden sei $S = \mathfrak{sl}_2 F$ und $\delta_n \colon S \to \mathfrak{gl}_n F$ „die" irreduzible Darstellung vom Grad n.
Durchweg sei $\operatorname{char}(F) = 0$.

Ü 61 Zeigen Sie, dass die natürliche Darstellung $\operatorname{id}\colon S \to \mathfrak{gl}_2 F$ und die adjungierte Darstellung $\operatorname{ad}\colon S \to \mathfrak{gl}(S)$ jeweils äquivalent zu δ_2 bzw. δ_3 sind.

Ü 62 Für $x \in S$ und $v \in V := \mathfrak{gl}_2 F$ sei $x.v := xv + vx^{\intercal}$. Zeigen Sie, dass dies V zum S-Modul macht. Bestimmen Sie alle irreduziblen Untermoduln.

Ü 63 Zeigen Sie: Der S-Modul aus Aufgabe Ü 62 ist isomorph zum S-Modul $F^2 \otimes F^2$, der durch $x.(v \otimes w) = (\delta_2(x)v \otimes w) + (v \otimes \delta_2(x)w)$ gegeben wird.

Ü 64 *tensorieren und reduzieren*

ⓐ Zeigen Sie: Durch $x.(v \otimes w) = (\delta_j(x)v \otimes w) + (v \otimes \delta_k(x)w)$ wird $F^j \otimes F^k$ zu einem S-Modul $M_{j,k}$.

ⓑ Bestimmen Sie die Äquivalenztypen irreduzibler Untermoduln in $M_{2,3}$ und in $M_{3,3}$.

Ü 65 Es sei $L := \mathfrak{gl}_3 F$. Zeigen Sie, dass $\varphi\colon S \to \mathfrak{gl}(L) : x \mapsto \operatorname{ad}_L \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine lineare Darstellung ist, und bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten.

Ü 66 *ein (generischer Ausnahme-) Isomorphismus*
Benutzen Sie die Killing-Form, um $\mathfrak{sl}_2 F \cong \mathfrak{o}_3 F$ nachzuweisen.

Ü 67 Zeigen Sie: Ist F algebraisch abgeschlossen, so gibt es eine S-Modulstruktur auf $V := \mathfrak{gl}_3 F$ derart, dass $F \cdot \operatorname{id}$, $\{a \mid a = -a^{\intercal}\}$ und $\{a \mid a = a^{\intercal}, \operatorname{Spur}(a) = 0\}$ die (einzigen) irreduziblen Untermoduln sind.

Ü 68 *maximal nilpotente Unteralgebren*
Eine Unteralgebra U einer Lie-Algebra L heißt *Cartan-Unteralgebra*, wenn $U = \mathrm{N}_L(U)$ und U nilpotent ist. Zeigen Sie: Jede Cartan-Unteralgebra ist maximal in der Menge $\mathfrak{N} := \{N \leq L \mid N \text{ ist nilpotent}\}$ der nilpotenten Unteralgebren. Belegen Sie durch Beispiele, dass nicht jedes maximale Element von $\mathfrak{N}$ eine Cartan-Unteralgebra sein muss.

Ü 69 Bestimmen Sie Cartan-Unteralgebren in

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in F \right\}, \quad \mathfrak{sl}_2 F \text{ und } \mathfrak{gl}_2 F .$$

Im Folgenden sei $\omega := \sqrt{3}$ und e_1, e_2 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$.

Ü 70 *Wurzelsysteme vom Rang* 2

Wir definieren

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_2 &:= \{\pm e_1, \pm e_2\}\,, \\
\mathrm{A}_2 &:= \left\{\pm e_1, \pm\tfrac{1}{2}(e_1 \pm \omega e_2)\right\}, \\
\mathrm{B}_2 &:= \{\pm e_1, \pm e_2, \pm(e_1 \pm e_2)\}\,, \\
\mathrm{G}_2 &:= \mathrm{A}_2 \cup \left\{\pm\tfrac{1}{2}\left(\pm e_1 \pm \tfrac{1}{\omega}e_2\right), \pm\tfrac{1}{\omega}e_2\right\}.
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie D_2, A_2, B_2, G_2; und verifizieren Sie, dass Wurzelsysteme vorliegen. Finden Sie „strings".

Ü 71 *halbeinfache Lie-Algebren vom Rang* 2

Sei L eine halbeinfache Liealgebra, der eines der Wurzelsysteme A_2, B_2, D_2, G_2 zugeordnet ist. Bestimmen Sie $\dim L$.

Ü 72 *Basen für Wurzelsysteme*

Bestimmen Sie jeweils das minimale Wurzelsystem, das die Menge $\{e_1, e_2\}$, $\left\{e_1, \frac{1}{2}(e_1 + \omega e_2)\right\}$, $\{e_1, e_1 + e_2\}$ bzw. $\left\{e_1, \frac{1}{2}\left(e_1 + \frac{1}{\omega}e_2\right)\right\}$ enthält.

Ü 73 *irrational?*

Wie verträgt sich das Auftreten von $\omega \notin \mathbb{Q}$ in den Wurzelsystemen A_2 und G_2 mit den Rationalitäts-Aussagen in (7.7) und (7.8) der Vorlesung (bzw. 8.4 und 8.5 in Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory) ?

Ü 74 *Skalarbereichs-Erweiterung*

Gegeben seien Körper $F < E$, eine F-Algebra (A, μ) und eine F-Basis B für A. Die E-Algebra (A_E, μ_E) sei definiert durch:

B ist eine E-Basis für A_E,

$\forall b, c \in B : \mu_M(b, c) = \mu(b, c)$.

Zeigen Sie:

(a) Ist A eine F-Lie-Algebra, so ist A_E eine E-Lie-Algebra.

(b) Ist A eine auflösbare Lie-Algebra, so ist auch A_E auflösbar.

Ü 75 *reelle halbeinfache Lie-Algebren*

Zeigen Sie: eine $\mathbb{R}$-Lie-Algebra L ist genau dann halbeinfach, wenn $L_\mathbb{C}$ halbeinfach ist.

Ü 76 *reelle einfache Lie-Algebren*

Wir betrachten $S = \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass zwar S einfach ist, aber $S_\mathbb{C}$ nicht. Vergleichen Sie mit Aufgabe Ü 75.

Ü 77 *Positivität in Wurzelsystemen*
Es sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, und es sei L eine halbeinfache Lie-Algebra mit Wurzelsystem Φ. Zeigen Sie: Aus $\Phi = \Delta_1 \cup \Delta_2$ mit $\Delta_1 \perp \Delta_2$ folgt $\Delta_j = \Phi \cap \langle \Delta_j \rangle_{\mathbb{Q}}$ und $L = I_1 \oplus I_2$ mit $I_j := \sum_{\delta \in \Delta_j} L_\delta + \langle t_\delta \mid \delta \in \Delta_j \rangle_F \trianglelefteq L$.

Ü 78 *konkrete Zerlegung I*
Bestimmen Sie die Wurzelraum-Zerlegungen für die Lie-Algebren $\mathfrak{o}_3 F$, $\mathfrak{o}_4 F$, $\mathfrak{o}_5 F$ bezüglich der toralen Unteralgebren

$$
\begin{aligned}
H_3 &:= \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & & \\ & a & \\ & & -a \end{pmatrix} \right| a \in F \right\}, \\
H_4 &:= \left\{ \left. \begin{pmatrix} a & & & \\ & -a & & \\ & & b & \\ & & & -b \end{pmatrix} \right| a, b \in F \right\}, \\
H_5 &:= \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & a & & & \\ & & -a & & \\ & & & b & \\ & & & & -b \end{pmatrix} \right| a, b \in F \right\}.
\end{aligned}
$$

Ü 79 *konkrete Zerlegung II*
Bestimmen Sie die Wurzelraum-Zerlegung für $\mathfrak{sl}_n F$ bezüglich

$$
H := \left\{ \left. \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \\ & & & -\sum_{j=1}^{n-1} a_j \end{pmatrix} \right| a_1, \dots, a_{n-1} \in F \right\}.
$$