Übungen zum Kompakt-Kurs — Lokal kompakte Gruppen

Markus Stroppel

Sommer 2004

Lieferung 0

Ü 0 *Rechenschieber*

Zeigen Sie, dass die topologischen Gruppen $(\mathbb{R},+)$ und $(]0,\infty[\,,\cdot)$ zueinander isomorph sind.

Ü 1 *Zylinder*

Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^\times := (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ und $\mathbb{R}\times \mathrm{U}_1\mathbb{C}$ zu einander isomorph sind.

Ü 2 *lineare Gruppen*

Es sei $\mathbb{K}$ ein topologischer Körper. Verifizieren Sie, dass die Multiplikation in $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ stetig ist (bezüglich der von der Koordinaten-Topologie auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ induzierten Topologie).
Welche Schwierigkeit ergibt sich bei der Inversion?

Hinweis: In LCG 5.3 wird die Stetigkeit der Inversion in GL_nR für topologische Ringe R diskutiert.

Ü 3 *kompakte Gruppen*

Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$, $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$, $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$ und $\mathrm{SU}_n\mathbb{C}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ kompakt sind.

Hinweis: $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ ist eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$. LCG Ex. 19.1

Ü 4 *Abschluss von Untergruppen*

Beweisen Sie, dass der Abschluss einer Untergruppe einer topologischen Gruppe stets wieder eine Untergruppe ist. LCG 4.3

Wie steht es mit dem Abschluss von Normalteilern?

Wie mit dem Abschluss von Zentralisatoren und Normalisatoren?

Ü 5 *Zusammenhang*

Beweisen Sie:

(a) Stetige Bilder zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.

(b) Der Abschluss eines zusammenhängenden Teilraumes ist zusammenhängend.

(c) Beliebige Produkte zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.

Hinweis: Wenn Sie (c) für unendlich viele Faktoren beweisen wollen, ist nützlich zu wissen bzw. zu zeigen: Jede Teilmenge eines Produkts, die auf alle endlichen Teilprodukte surjektiv projiziert wird, ist dicht.

LCG 2.5, 2.6, 2.9

Ü 6 *Quotienten*

Geben Sie jeweils wenigstens ein Beispiel einer Quotienten-Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) f ist eine offene, aber nicht abgeschlossene Abbildung.

(b) f ist eine abgeschlossene, aber nicht offene Abbildung.

Ü 7 *Kreis*

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zu $\mathrm{U}_1\mathbb{C}$ isomorph ist (als topologische Gruppe).

LCG : M. Stroppel, *Locally Compact Groups*, Manuskript, April 2004

Ü 8 *dichte Wicklungen*

Es sei $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die kanonische Projektion, und $v \in \mathbb{R}^2$.

ⓐ Bestimmen Sie $\langle v^\pi \rangle$ und $\overline{\langle v^\pi \rangle}$.

ⓑ Bestimmen Sie $(\mathbb{R}v)^\pi$ und $\overline{(\mathbb{R}v)^\pi}$.

Ü 9 *Quaternionen*

Es sei $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

ⓐ Verifizieren Sie, dass $\mathbb{H}$ ein Unterring des Rings $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist.

ⓑ Bestimmen Sie das Zentrum von $\mathbb{H}$.

Für $h := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ sei $\bar{h} := \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$.

ⓒ Verifizieren Sie, dass $h \mapsto \bar{h}$ ein involutorischer Anti-Automorphismus von $\mathbb{H}$ ist.

ⓓ Zeigen Sie: $(x|y) := \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$ definiert eine symmetrische $\mathbb{R}$-Bilinearform auf $\mathbb{H}$.

ⓔ Verifizieren Sie: $\forall\, x, y \in \mathbb{H} : (xy|xy) = (x|x)(y|y)$.

ⓕ Zeigen Sie, dass jedes Element von $\mathbb{H}^\times := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ multiplikativ invertierbar ist.

ⓖ Zeigen Sie, dass die Sphäre $\mathbb{S}_\mathbb{H} := \left\{ x \in \mathbb{H} \,\middle|\, (x|x) = 1 \right\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{H}^\times$ ist.

ⓗ Verifizieren Sie, dass $\mathbb{H}$ ein topologischer Körper ist. LCG Ex. 26.8

Bemerkung: Man kann (durch wörtliche Übertragung der Definition von $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$) auch über Quaternionen unitäre Gruppen definieren. Die Gruppe $\mathrm{U}_n\mathbb{H}$ wird kompakt.

Für Expertinnen:
Bis auf Quotienten nach dem (jeweils endlichen) Zentrum bilden die Gruppen $\mathrm{SU}_{n+1}\mathbb{C}$ ($n \geq 1$), $\mathrm{SO}_{2n+1}\mathbb{R}$ ($n \geq 1$), $\mathrm{U}_n\mathbb{H}$ ($n \geq 1$), $\mathrm{SO}_{2n}\mathbb{R}$ ($n \geq 3$) die kompakten einfachen Lie-Gruppen der Serien A_n, B_n, C_n, D_n.

Man sieht in der hier gegebenen Darstellung unmittelbar: $\mathrm{U}_1\mathbb{H} = \mathbb{S}_\mathbb{H} \cong \mathrm{SU}_2\mathbb{C}$.

Ferner gilt $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \cong \mathbb{S}_\mathbb{H}/\langle -\mathrm{id}\rangle \cong \mathrm{SU}_2\mathbb{C}/\langle -\mathrm{id}\rangle$; man sieht das, indem man zeigt, dass die Drehungen auf $\mathbb{R}^3 \cong \mathrm{Pu}\,\mathbb{H} := \left\{ h \in \mathbb{H} \,\middle|\, \bar{h} = -h \right\}$ sämtlich beschrieben werden können als Abbildungen der Form $h \mapsto \bar{a}ha$ mit $a \in \mathbb{S}_\mathbb{H}$.

Die Gruppe $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ kann man realisieren als die Menge aller Abbildungen der Form $\delta_{a,b} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : h \mapsto \bar{a}hb$ mit $a, \in \mathbb{S}_\mathbb{H}$; die Abbildung $(a,b) \mapsto \delta_{a,b}$ wird zu einem stetigen surjektiven Homomorphismus von $\mathbb{S}_\mathbb{H} \times \mathbb{S}_\mathbb{H}$ auf $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$. Damit erkennt man $\mathrm{SO}_4\mathbb{R} \cong (\mathbb{S}_\mathbb{H} \times \mathbb{S}_\mathbb{H})/\langle(-\mathrm{id}, -\mathrm{id})\rangle$.

Die hier beschriebenen Isomorphismen zwischen Lie-Gruppen entsprechen den Isomorphismen zwischen den einfachen komplexen Lie-Algebren $\mathsf{A}_1 \cong \mathsf{B}_1 \cong \mathsf{C}_1$ und $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1 \cong \mathsf{D}_2$, bzw. den zugehörigen „kompakten Formen".

LCG : M. Stroppel, *Locally Compact Groups*, Manuskript, April 2004

Übungen zum Kompakt-Kurs — Lokal kompakte Gruppen

Markus Stroppel Sommer 2004

Lieferung 1

Ü 10 *Epimorphismen in* T_2

Es seien Y und Z Hausdorff-Räume.

Beweisen Sie: Stimmen zwei stetige Abbildungen γ und δ von Y nach Z auf einer dichten Teilmenge von Y überein, so gilt $\gamma = \delta$. LCG 1.16

Zusatz: Braucht man alle Voraussetzungen?

Ü 11 *Epimorphismen in* **HG**

Es seien $F, G, H \in \mathsf{TG}$, $\varepsilon \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{TG}}(F, G)$, $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{TG}}(G, H)$. Zeigen Sie:
$(\varepsilon\alpha = \varepsilon\beta \wedge \overline{F^\varepsilon} = G \wedge H \in \mathrm{T}_2) \implies \alpha = \beta$. LCG 15.6

Ü 12 *Epimorphismen in* **TA** *und* **HA**

Seien jetzt $A, B \in \mathsf{TA}$ und $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{TA}}(A, B)$. Zeigen Sie:

ⓐ $A^\varphi \neq B \iff \exists Q \in \mathsf{TA}\ \exists \alpha, \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{TA}}(B, Q) : (\alpha \neq \beta \wedge \varphi\alpha = \varphi\beta)$.

ⓑ $\overline{A^\varphi} \neq B \iff \exists Q \in \mathsf{HA}\ \exists \alpha, \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{TA}}(B, Q) : (\alpha \neq \beta \wedge \varphi\alpha = \varphi\beta)$.

Ziehen Sie die Konsequenzen: Was sind die Epimorphismen in **HA** ? LCG 15.8

Ü 13 *Epimorphismen in* **TR**

Zeigen Sie: Für $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{TR}}(\mathbb{Q}, S)$ gilt stets $\varphi = 0$ oder $\ker\varphi = \{0\}$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass die Inklusion $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epimorphismus in **TR** ist.

Ü 14 *äquivalente gerichtete Systeme*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n := \frac{1}{p^n}\mathbb{Z} < (\mathbb{Q}, +)$ und $E_n := \mathbb{Z}$. Weiter seien für $n \leq m$ die Abbildungen $d_{n,m} : D_n \to D_m$ bzw. $e_{n,m} : E_n \to E_m$ gegeben durch $z^{d_{n,m}} := z$ bzw. $z^{e_{n,m}} = p^{m-n}z$.

Zeigen Sie, dass $((D_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_{n,m})_{n\leq m})$ und $((E_n)_{n\in\mathbb{N}}, (e_{n,m})_{n\leq m})$ gerichtete Systeme in **DG** sind.

Zeigen Sie außerdem, dass diese gerichteten Systeme äquivalent sind, d.h. dass es eine Familie $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Isomorphismen

$$\eta_n : D_n \to E_n$$

in **DG** derart gibt, dass für $n \leq m$ stets $\eta_n e_{n,m} = d_{n,m}\eta_m$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
D_n \arrow[r, "d_{n,n+1}"] \arrow[rr, "d_{n,n+2}"'] \arrow[d, dotted, "\eta_n"'] & D_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1,n+2}"] \arrow[d, dotted, "\eta_{n+1}"] & D_{n+2} \arrow[d, dotted, "\eta_{n+2}"] \\
E_n \arrow[r, "e_{n,n+1}"] \arrow[rr, "e_{n,n+2}"'] & E_{n+1} \arrow[r, "e_{n+1,n+2}"] & E_{n+2}
\end{tikzcd}$$

Ü 15 *ein direkter Limes?*

Bestimmen Sie einen direkten Limes für eines (und damit beide) der gerichteten Systeme in Aufgabe Ü 14.

Bleibt Ihr Limes auch ein solcher, wenn man alles in der Kategorie **TG** statt **DG** betrachtet?

LCG : M. Stroppel, *Locally Compact Groups*, Manuskript, April 2004

Übungen zum Kompakt-Kurs **Lokal kompakte Gruppen**

Markus Stroppel — Sommer 2004

Lieferung 1

Ü 16 *q-adische Zahlen: Kompaktheit*

Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $C := \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z}$ (mit der Produkt-Topologie).

ⓐ Wann ist C kompakt?

ⓑ Bestimmen Sie den Abschluss von $Z := \left\{(z + q^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z}\right\}$ in C.

ⓒ Bestimmen Sie für $a \in C$ den Abschluss von $N := \left\{za \;\middle|\; z \in \mathbb{N}\right\}$ in C.

Es sei jetzt $q > 0$.

ⓓ Konstruieren Sie ein projektives System derart, dass $\overline{Z}$ mit den Einschränkungen der kanonischen Projektionen $\pi_j : C \to \mathbb{Z}/q^j\mathbb{Z} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_j$ ein projektiver Limes des Systems ist.

Ü 17 *Eindeutigkeit von Limiten*

Zeigen Sie: Sind $(\pi_j)_{j\in J}$ und $(\gamma_j)_{j\in J}$ projektive Limiten (mit Spitzen Π bzw. Γ) eines projektiven Systems

$$P : \mathbb{J} \to \mathsf{C},$$

so gibt es genau einen Isomorphismus $\alpha : \Pi \to \Gamma$ derart, dass gilt: $\forall\, j \in J : \alpha\gamma_j = \pi_j$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Pi \arrow[ddll, "\pi_j"'] \arrow[d, "\pi_k"] \arrow[ddr, "\pi_m"] \arrow[dddr, dotted, bend left, "\alpha"] & \\
 & & P_k \arrow[dll, "p_{j,k}"'] & \\
P_j & & & P_m \arrow[lll, "p_{j,m}"] \arrow[ul, "p_{k,m}"'] \\
 & & & \Gamma \arrow[ulll, "\gamma_j"] \arrow[uul, "\gamma_k"] \arrow[u, "\gamma_m"']
\end{tikzcd}$$

Dualisieren Sie dies, um die Eindeutigkeit direkter Limiten zu beweisen. LCG 17.10, 17.16

Ü 18 *Produkte als projektive Limiten*

Stellen Sie $\bigtimes_{i\in I} A_i$ als projektiven Limes des Systems aller endlichen Teilprodukte dar (d.h.: über $J := \left\{T \subseteq I \;\middle|\; T \text{ endlich}\right\}$).

Ü 19 *konkrete Realisierung*

ⓐ Es sei $D : \mathbb{J} \to \mathsf{DA}$ ein gerichtetes System, bei dem alle Verbindungsmorphismen $d_{i,j}$ injektiv sind.

Wir setzen $\Delta := \varinjlim^{\mathsf{DA}} D := \bigoplus_{j\in J} D_j/R$ mit $R := \langle a - a^{d_{i,j}} \mid i,j \in J, i \preceq j, a \in D_i\rangle$,
und $\delta_j : D_j \to \Delta : a \mapsto a + R$.

Zeigen Sie, dass $(\delta_j)_{j\in J}$ einen direkten Limes mit Spitze Δ für D liefert.

ⓑ Es sei $P : \mathbb{J} \to \mathsf{CG}$ ein projektives System, bei dem alle Verbindungsmorphismen $p_{i,j}$ surjektiv sind.

Wir setzen $\Pi := \varprojlim^{\mathsf{CG}} P := \left\{(x_j)_{j\in J} \in \bigtimes_{j\in J} P_j \;\middle|\; i \preceq j \implies x^{p_{i,j}} = x_j\right\}$,
und $\pi_i : \Pi \to P_i : (x_j)_{j\in J} \mapsto x_i$.

Zeigen Sie, dass $(\pi_j)_{j\in J}$ einen projektiven Limes mit Spitze Π für P liefert.

LCG : M. Stroppel, *Locally Compact Groups*, Manuskript, April 2004

Lieferung 2

Ü 20 *Zusammenhangs-Komponenten in kompakten Hausdorff-Räumen*

Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Beweisen Sie, dass für jeden Punkt $a \in X$ die Zusammenhangskomponente X_a genau der Schnitt aller offenen abgeschlossenen Teilmengen ist, die a enthalten: $X_a = \bigcap \left\{ S \subseteq X \mid a \in S \mathrel{\underline{\circledcirc}} X \right\}$. LCG 2.10a

Ü 21 *ein Schritt zur Existenz offener kompakter Untergruppen*

Es sei G eine topologische Gruppe, darin U eine offene kompakte Umgebung des Neutralelements. Beweisen Sie, dass es eine Umgebung W des Neutralelements derart gibt, dass $UW = U$ gilt.

In welchen Gruppen existieren offene kompakte Umgebungen des Neutralelements?

Ü 22 *offene Untergruppen*

Geben Sie für die folgenden Gruppen jeweils konkrete Umgebungsbasen des Neutralelements an, die aus offenen Normalteilern bestehen:

$$\mathbb{Z}(n)\,, \quad \mathbb{Z}(n)^{\mathbb{N}}\,, \quad \mathbb{Z}_p\,, \quad \mathrm{GL}_n\mathbb{Z}_p\,,$$
$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\,, \quad \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}\,, \quad \mathbb{Z}(n)^{(\mathbb{N})}\,, \quad S^{\mathbb{N}}\,,$$

(wobei S eine diskrete einfache Gruppe sei).

Ü 23 *Konstruktion projektiver Limiten*

Es sei G eine topologische Gruppe, und es sei $\mathcal{N}$ eine Menge von Normalteilern von G.
Wir setzen $G_{\mathcal{N}} := \left\{ (Ng_N)_{N\in\mathcal{N}} \mid L \le M \implies Mg_L = Mg_M \right\} \subseteq \bigtimes_{N\in\mathcal{N}} G/N$, und
$\eta_{\mathcal{N}} : G \to G_{\mathcal{N}} : g \mapsto (Ng)_{N\in\mathcal{N}}$. Beweisen Sie:

- ⓐ $G_{\mathcal{N}}$ ist eine Untergruppe von $\bigtimes_{N\in\mathcal{N}} G/N$.
- ⓑ $\eta_{\mathcal{N}}$ ist ein stetiger Homomorphismus.
- ⓒ $\ker \eta_{\mathcal{N}} = \bigcap \mathcal{N}$.
- ⓓ Ist $\mathcal{N}$ eine Filterbasis, so ist $G_{\mathcal{N}}$ im Abschluss $\overline{G^{\eta_{\mathcal{N}}}}$ in $\bigtimes_{N\in\mathcal{N}} G/N$ enthalten.
- ⓔ Besteht $\mathcal{N}$ aus abgeschlossenen Normalteilern, so ist $G_{\mathcal{N}}$ abgeschlossen in $\bigtimes_{N\in\mathcal{N}} G/N$.

Ü 24 *kompakte Gruppen in freier Wildbahn*

Finden Sie heraus, was die Krull-Topologie ist, und was diese mit dem aktuellen Gegenstand zu tun hat.

LCG : M. Stroppel, *Locally Compact Groups*, Manuskript, April 2004

Lieferung 3

Ü 30 *kompakt–offene Topologie für Hausdorff-Räume*

Es seien X und Y topologische Räume.
Beweisen Sie, dass aus $Y \in \mathrm{T}_2$ auch $\mathcal{T}_{\text{cp-o}}(X,Y) \in \mathrm{T}_2$ folgt.

Ü 31 *modifizierte kompakt–offene Topologie*

Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf einer Gruppe (G,μ,ι,e), bezüglich der die Multiplikation stetig ist.

Zeigen Sie, dass bezüglich der Topologie $\widetilde{\mathcal{T}} := \langle T \cap S^\iota \,|\, T,S \in \mathcal{T}\rangle_{\text{top}}$ alle Gruppen-Operationen stetig sind.

Ü 32 *Endomorphismenringe und Automorphismengruppen*

Es sei $\mathbb{Z}(2)$ die Gruppe mit 2 Elementen, und es sei $V := \mathbb{Z}(2)^{(\mathbb{N})}$ die Menge aller abbrechenden Folgen von Elementen aus $\mathbb{Z}(2)$. Wir versehen V mit der komponentenweisen Addition und der diskreten Topologie.

ⓐ Bestimmen Sie $\mathrm{Mor}_{\mathsf{TG}}(V,V)$ und $\mathrm{Aut}_{\mathsf{TG}}(V)$.

ⓑ Wie sieht die kompakt–offene Topologie auf $\mathrm{Mor}_{\mathsf{TG}}(V,V)$ bzw. $\mathrm{Aut}_{\mathsf{TG}}(V)$ aus?

Jetzt ersetzen wir $\mathbb{Z}(2)$ durch $\mathbb{Q}$, und topologisieren wieder $W := \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ diskret.

ⓒ Bestimmen Sie $\mathrm{Mor}_{\mathsf{TG}}(W,W)$ und $\mathrm{Aut}_{\mathsf{TG}}(W)$.

ⓓ Wie sieht die kompakt–offene Topologie auf $\mathrm{Mor}_{\mathsf{TG}}(W,W)$ bzw. $\mathrm{Aut}_{\mathsf{TG}}(W)$ aus?

Ü 33 Studieren Sie wenigstens einen Beweis des Satzes von Arzela–Ascoli.

Übungen zum Kompakt-Kurs **Lokal kompakte Gruppen**

Markus Stroppel Sommer 2004

Lieferung 4

> *Hinweis:* Wir schreiben hier $\widehat{A} := \mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(A, \mathbb{T})$ für die Charaktergruppe von A — in LCG steht A^* .

Ü 40 *Evaluation*

Es sei $A \in \mathsf{LCA}$. Wir definieren $\varepsilon_A := (a \mapsto \langle a, \cdot \rangle)$.
Beweisen Sie, dass ε_A ein stetiger Gruppen-Homomorphismus von A nach $\widehat{A}$ ist.

Ü 41 *Fortsetzung von Homomorphismen in teilbare Gruppen*

Es seien A und T abelsche topologische Gruppen, und es sei T teilbar. Zeigen Sie:

ⓐ Ist B eine Untergruppe von A und $\varphi : B \to T$ ein Homomorphismus von Gruppen, so gibt es eine Fortsetzung $\psi : A \to T$ von φ zu einem Homomorphismus.

ⓑ Ist B eine offene Untergruppe und φ stetig, so ist auch jede Fortsetzung stetig.

Ü 42

Verifizieren Sie, dass $\widehat{A}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(A, \mathbb{T})$ ist.

Ü 43 *Produkte*

Es seien $A, B \in \mathsf{LCA}$. Wir setzen

$$\begin{array}{rrcl}
\alpha : & A \times B \longrightarrow A : & (a,b) & \mapsto & a \\
\bar\alpha : & A \longrightarrow A \times B : & a & \mapsto & (a,0) \\
\beta : & A \times B \longrightarrow B : & (a,b) & \mapsto & b \\
\bar\beta : & B \longrightarrow A \times B : & b & \mapsto & (0,b) \\
\eta_{A,B} : & \widehat{A \times B} \to \widehat{A} \times \widehat{B} : & \chi & \mapsto & (\bar\alpha\chi, \bar\beta\chi)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\bar\alpha"] & & B \arrow[ul, hook', "\bar\beta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{A \times B} \arrow[dl, "\widehat{\bar\alpha}"] \arrow[dr, "\widehat{\bar\beta}"'] \arrow[dd, "\eta_{A,B}"] & \\
\widehat{A} \arrow[ur, hook, "\widehat{\alpha}"] & & \widehat{B} \arrow[ul, hook', "\widehat{\beta}"'] \\
 & \widehat{A} \times \widehat{B} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Verifizieren Sie:

ⓐ $\alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta = \mathrm{id}_{A \times B}$.

ⓑ $\bar\alpha\beta = 0$, $\bar\beta\alpha = 0$.

ⓒ $\eta_{A,B}$ ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen, mit $\eta_{A,B}^{-1} : (\varphi, \psi) \mapsto \alpha\varphi + \beta\psi$.

ⓓ $\varepsilon_{A \times B} = (\varepsilon_A \times \varepsilon_B)\, \eta^{-1}_{\widehat{A},\widehat{B}}\, \widehat{\eta_{A,B}}$.

Ü 44 *keine kleinen Untergruppen*

Zeigen Sie, dass es sowohl in $\mathbb{R}$ als auch in $\mathbb{T}$ jeweils Umgebungen des Neutralelements gibt, die keine Untergruppe außer der trivialen enthalten.

Auf welche Gruppen können Sie dies verallgemeinern?

Geben Sie Beispiele topologischer Gruppen, in denen es beliebig kleine Untergruppen gibt.

Übungen zum Kompakt-Kurs Lokal kompakte Gruppen

Markus Stroppel — Sommer 2004

Lieferung 5

Ü 50 *Urbilder kompakter Umgebungen bei offenen Morphismen*

Es sei $\varphi : B \mathrel{\circ\!\!\longrightarrow} C$ ein *offener* Morphismus in LCA. Beweisen Sie, dass zu jeder kompakten Umgebung M von 0 in C mit $M \subseteq B^\varphi$ eine kompakte Umgebung N von 0 in B derart existiert, dass $N^\varphi = M$.

Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass man auf die Voraussetzung der Offenheit für φ nicht verzichten kann.

Ü 51 *Torsion im Kreis*

Bestimmen Sie alle Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Ü 52 *zyklische Untergruppen*

Bestimmen Sie $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{Z},\mathbb{T})$.

Ü 53 Es sei $\mathbb{Q}$ diskret topologisiert.

Bestimmen Sie $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$, $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$.

Ü 54 *Einparameter-Untergruppen*

Bestimmen Sie $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{R},\mathbb{Z})$, $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(\mathbb{R},\mathbb{T})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}\left(\mathbb{R}^a,\mathbb{R}^b\right)$.

Welche der auf diesem Blatt gefundenen Morphismen sind Mono- bzw. Epimorphismen in LCA ?

Ü 55 *Untergruppen*

Zeigen Sie, dass jede echte abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$ zyklisch ist.

Hinweis: Für $H \lneqq \mathbb{R}$ ist $\inf\left\{h \in H \mid h > 0\right\}$ ein guter Kandidat für den Erzeuger.

Übungen zum Kompakt-Kurs **Lokal kompakte Gruppen**

Markus Stroppel Sommer 2004

Lieferung 6

Ü 60 *mehr Charakter-Gruppen*

Bestimmen Sie $\widehat{\mathbb{R}^\times}$ und $\widehat{\mathbb{C}^\times}$.

Ü 61 *Vektor-Gruppen*

Es gebe in $A \in \mathsf{LCA}$ eine Untergruppe B so, dass $B \cong \mathbb{R}^b$ und $A/B \cong \mathbb{R}^a$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{N}$ erfüllt sind. Zeigen Sie, dass A zu $\mathbb{R}^{a+b}$ isomorph ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass A zu CGAL gehört, dass A zusammenhängend ist, und dass A keine kompakte Untergruppe außer der trivialen enthält.

Ü 62 *maximal kompakte Untergruppen*

Beweisen Sie, dass jede Gruppe $A \in \mathsf{CGAL}$ eine Untergruppe enthält, die maximal unter den kompakten Untergruppen von A ist.

Was kann man über die Eindeutigkeit sagen?

Vergewissern Sie sich, dass es in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ Paare kompakter Untergruppen gibt, die nicht in einer gemeinsamen kompakten Obergruppe liegen.

Ü 63 *keine kleinen Untergruppen*

Beweisen Sie: In jeder Gruppe $A \in \mathsf{CGAL}$ gibt es eine Umgebung des Neutral-Elements, die keine Untergruppe außer der trivialen enthält.

Ü 64 Zeigen Sie, dass die diskrete Gruppe $\mathbb{Q}$ nicht zu CGAL gehört.

Gibt es überhaupt eine Topologie $\mathcal{T}$ so, dass $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}) \in \mathsf{CGAL}$?

Ü 65 Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ nicht zu CGAL gehört.

Ü 66 Zeigen Sie:

- ⓐ Jede Gruppe in CGAL ist eingebettet in eine Gruppe der Form $\mathbb{R}^a \times \mathbb{T}^b$.
- ⓑ Die Klasse CGAL ist abgeschlossen unter der Bildung endlicher Produkte, aber nicht abgeschlossen unter der Bildung beliebiger Produkte.

Übungen zum Kompakt-Kurs — **Lokal kompakte Gruppen**

Markus Stroppel — Sommer 2004

Lieferung 7

Ü 70 *eine einseitige Inverse*

Beweisen Sie, das für jede lokal kompakte abelsche Hausdorff-Gruppe A gilt: $\varepsilon_{\widehat{A}}\widehat{\varepsilon_A} = \mathrm{id}_{\widehat{A}}$.

Ü 71 *Mono- und Epimorphismen*

Es sei $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{LCA}}(A, B)$. Beweisen Sie: φ ist ein Monomorphismus genau dann, wenn $\widehat{\varphi}$ ein Epimorphismus ist.

Wozu brauchen Sie den Dualitäts-Satz?

Ü 72 *p-adische Zahlen*

Bestimmen Sie die Charakter-Gruppe der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_p$.

Ü 73 *ein Monster?*

Beschreiben Sie die Charakter-Gruppe $\widehat{\mathbb{Q}}$ als projektiven Limes — dabei soll $\mathbb{Q}$ diskret topologisiert sein.

Ü 74 Begründen Sie, warum $\widehat{\mathbb{Q}}$ torsionsfrei ist (d.h.: keine Elemente endlicher Ordnung außer dem trivialen enthält).

Ü 75 Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{T}$.

Hinweis: Dualisieren Sie die Einbettung $A \overset{\eta}{\hookrightarrow} \mathbb{T}$ — ich hoffe, Sie kennen die Quotienten von $\mathbb{Z}$.

Ü 76 *teile und herrsche*

Es sei $A \in \mathsf{CA} \cup \mathsf{DA}$. Zeigen Sie:

(a) Ist A torsionsfrei, so ist $\widehat{A}$ teilbar.

(b) Ist A teilbar, so ist $\widehat{A}$ torsionsfrei.

Hinweis: Betrachten Sie den Endomorphismus $x \mapsto nx$, für $n \in \mathbb{N}$, und dessen Dual.

Wozu braucht man die Voraussetzung $A \in \mathsf{CA} \cup \mathsf{DA}$?

Ü 77 *Ausblick*

Informieren Sie sich, in welche Eigenschaften des Duals sich die folgenden Eigenschaften von $A \in \mathsf{LCA}$ übersetzen:

(a) A ist zusammenhängend.

(b) A ist teilbar.

(c) A ist eine Torsionsgruppe.

(d) A ist Vereinigung kompakter Untergruppen.

(e) A ist wegzusammenhängend.