Vorlesungsskript Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten SS 13

Mark Hamilton, Uwe Semmelmann

29. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialoperatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

1.1 Der Hodge-Stern-Operator

Wir beginnen mit etwas linearer Algebra. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, or)$ ein orientierter euklidischer Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf dem Raum der p-Formen $\Lambda^p V^*$ wird definiert durch die Festlegung, dass ausgehend von einer Ortho-normal-Basis $\{e_i\}$ in V die $p-Formen$ $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \,|\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$ eine Orthonormalbasis in $\Lambda^p V^*$ bilden, wobei $\{e^i\}$ die zu $\{e_i\}$ duale Basis in V^* bezeichnet.

Definition 1.1 *Der Hodge-Stern-Operator $*$ ist der eindeutig bestimmte Vektorraum Isomorphismus*

$$* : \Lambda^p V^* \to \Lambda^{n-p} V^* ,$$

so dass für alle $\alpha, \beta \in \Lambda^p V^*$ gilt:

$$\alpha \wedge *\beta \;=\; \langle\, \alpha,\, \beta \,\rangle \,\mathrm{vol}$$

dabei ist $\mathrm{vol} = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ *das Volumenelement.*

Bemerkungen:

1. Auf zerlegbaren 2-Formen hat das Sklarprodukt die einfache Form:

$$\langle\, X \wedge Y,\, U \wedge V \,\rangle \;=\; \langle\, X,\, U \,\rangle \langle\, Y,\, V \,\rangle \;-\; \langle\, X,\, V \,\rangle \langle\, Y,\, U \,\rangle \;.$$

2. Sei I die Index-Menge $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ und I^c die komplementäre Index-Menge $I^c = \{j_1, \ldots, j_{n-p}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Dann gilt

$$*\,(e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}) \;=\; \mathrm{sign}(I, I^c)\, e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_{n-p}}$$

3. Das Sklarprodukt definiert einen natürlichen Isomorphismus $\flat : V \to V^*$, gegeben durch $X^\flat(Y) = \langle\, X,\, Y \,\rangle$ für beliebige Vektoren X, Y. Insbesondere ist $e^i = (e_i)^\flat$. Den zu $\flat$ inversen Isomorphismus schreibt man als $\sharp : V^* \to V$.

Satz 1.2 *Der Hodge-Stern-Operator hat folgende Eigenschaften:*

1. $\quad *1 \;=\; \mathrm{vol}, \qquad *\mathrm{vol} \;=\; 1$

2. *Für $\alpha \in \Lambda^p V^*$ und $\beta \in \Lambda^{n-p} V^*$ gilt*

$$\langle\, \alpha,\, *\beta \,\rangle \;=\; (-1)^{p(n-p)} \langle\, *\alpha,\, \beta \,\rangle \;.$$

3. $\quad *^2 \;=\; (-1)^{p(n-p)} \,\mathrm{Id}_{\Lambda^p}$

4. *Für beliebige p-Formen α und Vektoren X gilt:*

$$*\,(X \lrcorner\, \alpha) \;=\; (-1)^{p-1}\, X^\flat \wedge *\,\alpha \quad \textit{und} \quad *\,(X^\flat \wedge \alpha) \;=\; (-1)^p\, X \lrcorner *\, \alpha$$

5. $\quad *X^\flat \;=\; X \lrcorner \mathrm{vol}$

6. *Der Hodge-Stern-Operator ist eine Isometrie*

Beweis:

$\square$

Folgerung 1.3 *Das Einsetzen von Vektoren ist dual zum Dachprodukt, d.h. es gilt*

$$\langle\, X \lrcorner \alpha,\, \beta \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha,\, X^\flat \wedge \beta \,\rangle$$

für Vektoren X und Formen $\alpha \in \Lambda^p V^*, \beta \in \Lambda^{p-1} V^*$.

Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann überträgt sich der Hodge-Stern-Operator $* : \Lambda^p T_x^* M \to \Lambda^{n-p} T_x^* M$ punktweise zu einem Bündelisomorphismus:

$$* : \Lambda^p T^* M \to \Lambda^{n-p} T^* M \;.$$

Lemma 1.4 *Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Dann gilt für beliebige Vektorfelder X und Differentialformen α*

$$\nabla_X * \alpha \;=\; * \nabla_X \alpha \;,$$

d.h. der Hodge-Stern-Operator ist ein paralleler Bündelisomorphismus.

Es soll zunächst an eine Reihe von Grundbegriffen erinnert werden. Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist das *kanonische Volumenelement* $\mathrm{vol} = \mathrm{vol}_g$ definiert durch die Bedingung

$$\mathrm{vol}_g(e_1, \ldots, e_n) \;=\; 1$$

für alle positiv orientierten Orthonormal-Basen $\{e_i\}$. In lokalen Koordinaten (U, x) gilt

$$\mathrm{vol}_g \;=\; |\det(g_{ij})|^{\frac{1}{2}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \;.$$

Zu einer beliebigen glatten Funktion f ist das *Gradienten-Vektorfeld* $\mathrm{grad}\, f \in \chi(M)$ definiert durch

$$g(\mathrm{grad}\, f, X) \;=\; df(X) = X(f)$$

d.h. es gilt $df = (\mathrm{grad}\,)^\flat$. In lokalen Koordinaten (U, x) gilt

$$\mathrm{grad}\, f \;=\; \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

dabei ist $g = (g_{ij})$ die Matrix der Metrik in lokalen Koordinaten und $g^{-1} = (g^{ij})$.

Die *Divergenz* eines Vektorfeldes X ist definiert durch

$$\operatorname{div} X \;=\; \sum g(\nabla_{e_i} X, e_i) \;=\; \operatorname{tr}(\nabla X) \;,$$

wobei $\{e_i\}$ eine lokale Ortho-normal-Basis ist. In lokalen Koordinaten (U,x) gilt

$$\operatorname{div} X \;=\; \bar{g}^{-\frac{1}{2}} \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\bar{g}}\, a_i) \;,$$

wobei $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\bar{g} = \det(g_{ij})$. Zum Beweis dieser Formel nutzt man die Gestalt des kanonischen Volumenelements in lokalen Koordinaten und Satz 1.6.

Lemma 1.5 *Für beliebige glatte Funktionen f und Vektorfelder X gilt:*

$$\operatorname{div}(f \cdot X) \;=\; f \cdot \operatorname{div} X \;+\; g(\operatorname{grad} f, X)$$

Ein *konformes Vektorfeld* ist ein Vektorfeld X, dessen lokaler Fluß φ_t aus lokalen konformen Abbildung besteht, d.h. es gilt $\varphi_t^* g = \lambda g$, für eine gewisse lokal definierte Funktion λ. Ein Vektorfeld X ist genau dann konform, falls eine Funktion f existiert mit

$$L_X g \;=\; f\, g \qquad \text{es folgt dann} \qquad f = -\frac{2}{n} \operatorname{div} X \;.$$

Killing Vektorfelder sind eine spezielle Klasse konformer Vektorfelder (mit $f = 0$).

Satz 1.6 *Für alle Vektorfelder auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gilt*

$$L_X \mathrm{vol}_g \;=\; d\,(X \lrcorner \mathrm{vol}) \;=\; d * X^\flat \;=\; \operatorname{div} X\, vol_g \;.$$

Insbesondere ist der Fluß von divergenz-freien Vektorfeldern volumenerhaltend und

$$\operatorname{div} X \;=\; * \, d * X^\flat \;.$$

Beweis:

□

1.2 Bemerkung zu rot, grad und div

Als Beispiel soll $M = \mathbb{R}^3$ mit der Standardmetrik $g_{ij} = \delta_{ij}$ betrachtet werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f \;&= \textstyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
\operatorname{div} X \;&= \textstyle\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \qquad \text{für} \quad X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\
\operatorname{rot} X \;&= \left(\tfrac{\partial a_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) \tfrac{\partial}{\partial x_1} \;+\; \left(\tfrac{\partial a_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \tfrac{\partial}{\partial x_2} \;+\; \left(\tfrac{\partial a_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) \tfrac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

Sei ein Vektorfeld X gegeben als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_1}$, dann schreibt sich die dazugehörige 1-Form $X^\flat$ als $X^\flat = \sum a_i dx_i$. Für den Hodge-Stern-Operator auf 1-Formen auf $\mathbb{R}^3$ gilt: $*^2 = \mathrm{Id}_{\Lambda^1}$. Für eine Funktion f gilt $*f = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ und für eine 1-Form $\omega = \sum a_i dx_i$ gilt $*\omega \;=\; a_1\, dx_2 \wedge dx_3 \;-\; a_2\, dx_1 \wedge dx_3 \;+\; a_3\, dx_1 \wedge dx_2$.

Lemma 1.7 *Für beliebige Vektorfelder X auf $\mathbb{R}^3$ gilt:*

1. $d\,X^\flat \;=\; *(\mathrm{rot}\,X)^\flat$
2. $d * X^\flat \;=\; *\mathrm{div}\,X$

Beweis:

$\square$

Folgerung 1.8 *Sei f eine Funktion und X ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:*

1. $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) \;=\; 0$
2. $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,X) \;=\; 0$

Beweis:

$\square$

Folgerung 1.9 *Sei X ein Vektorfeld auf einer kontrahierbaren offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$, dann gilt:*

1. $\mathrm{rot}\,X \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, f \in \mathcal{C}^\infty(U): \quad X \;=\; \mathrm{grad}\,f$
2. $\mathrm{div}\,X \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, Y \in \chi(U): \quad X \;=\; \mathrm{rot}\,Y$

Beweis:

$\square$

Bemerkungen:

1. Zur Anwendung des Lemmas von Poincare genügt eigentlich die Voraussetzung $\mathrm{H}^1_{dR}(U) = 0$ oder $\pi_1(M) = 1$, dh., dass U einfach-zusammenhängend ist.
2. Der Laplace-Operator in der Riemannschen Geometrie hat ein anderes Vorzeichen als in der Analysis:

$$\Delta f \;=\; -\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f) \;=\; -\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,.$$

1.3 Differential, Kodifferential und Laplace-Operator

In diesem Abschnitt soll der zum Differential d formal-adjungierte Operator d^*, das Kodifferential beschrieben werden. Daher soll zunächst an die Integration auf Mannigfaltigkeiten erinnert werden.

Sei M^n eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Karten (U_α, h_α), d.h. $h_\alpha : U_\alpha \subset M \to \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\{\psi_\alpha\}$ ein der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Das Integral einer n-Form mit kompakten Träger $\omega \in \Omega_c^n(M)$ ist dann definiert durch:

$$\int_M \omega \;=\; \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \psi_\alpha \cdot \omega \;=\; \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} (h_\alpha^{-1})^*(\psi_\alpha \omega) \;.$$

Dieses Integral ist wohldefiniert, also unabhängig von der Kartenwahl und der Zerlegung der Eins, und es gelten die üblichen Rechenregeln. Für das Weitere von besonderer Bedeutung sind die Sätze von Stokes und Green.

Satz 1.10 (Stokes) *Sei M^n eine orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand und sei ω eine beliebige $n-1$-Form mit kompakten Träger. Dann gilt*

$$\int_M d\omega \;=\; 0 \;.$$

Bemerkung: Der Satz von Stokes gilt allgemeiner für Mannigfaltigkeiten mit Rand und besagt dann: $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.

Satz 1.11 (Green) *Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, ohne Rand und sei X ein beliebiges Vektorfeld auf M. Dann gilt:*

$$\int_M \mathrm{div}\,(X)\,\mathrm{vol}_g \;=\; 0 \;.$$

Beweis:

$$\int_M \mathrm{div}\,(X)\,\mathrm{vol}_g \;=\; \int_M d\,(*X^\flat) \;=\; 0 \;.$$

□

Sei (M, g) eine Riemannsche Metrik, dann induziert g, wie oben im Fall von Vektorräumen beschrieben, ein Skalarprodukt auf dem Raum der Formen, welches wieder mit g bezeichnet wird.

Definition 1.12 *Das L^2-Skalarprodukt auf dem Raum der p-Formen mit kompakten Träger ist definiert durch*

$$(\alpha, \beta) \;=\; \int_M g(\alpha, \beta)\,\mathrm{vol}_g$$

für $\alpha, \beta \in \Omega_c^p(M)$.

Das Differential ist ein Differential-Operator 1. Ordnung, $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$. Mit Hilfe des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ schreibt sich das Differential $d\omega$ einer p-Form ω als

$$d\omega \;=\; \sum_i e^i \wedge \nabla_{e_i}\omega \;,$$

wobei $\{e_i\}$ ein lokale Orthonormal-Basis ist. In Analogie zu dieser Formel definiert man nun das Kodifferential d^*.

Definition 1.13 *Das Kodifferential $d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ ist ein Differential-Operator 1. Ordnung, definiert durch*

$$d^*\omega \;=\; -\sum_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i}\omega \;,$$

wobei $\{e_i\}$ eine lokale Orthonormal-Basis und $\omega \in \Omega^p(M)$ ist.

Lemma 1.14 *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ω eine p-Form. Dann gilt*

$$d^*\omega \;=\; - * d * \omega \;.$$

Beweis:

□

Folgerung 1.15 *Sei X ein Vektorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Dann gilt*

$$\operatorname{div} X \;=\; -d^* X^\flat \;.$$

Lemma 1.16 *Das Kodifferential ist formal-adjungiert zum Differential, d.h. es gilt*

$$(d\alpha, \beta) \;=\; (\alpha, d^*\beta)$$

für alle $\alpha \in \Omega_c^{p-1}(M), \beta \in \Omega_c^p(M)$.

Definition 1.17 *Die* Hessische *einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist definiert durch* $\operatorname{Hess}(f) = \nabla(df)$, *d.h.*

$$\operatorname{Hess}(f)(X, Y) \;=\; X(Y(f)) \;-\; \nabla_X Y(f)$$

für beliebige Vektorfelder X, Y.

Lemma 1.18 *Die Hessische hat folgende Eigenschaften:*

1. $\operatorname{Hess}(f) \;=\; \nabla^2(f)$
2. *Die Hessische ist ein symmetrischer $(0, 2)$-Tensor.*

Beweis:

□

Definition 1.19 *Der* Laplace-Operator *auf glatten Funktionen f ist definiert durch*

$$\Delta f \;=\; -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\ .$$

Satz 1.20 *Die Laplace - Operator auf Funktionen hat folgende Eigenschaften:*

1. $\Delta f \;=\; d^* d\, f \;=\; -\, * d * df$

2. $\Delta f \;=\; -\operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)$

3. *Der Laplace-Operator ist formal-selbstadjunigiert und positiv, d.h. für glatte Funktionen f, g mit kompakten Träger gilt*

$$(\Delta f, g) \;=\; (f, \Delta g) \qquad \textit{und} \qquad (\Delta f, f) \;\geq\; 0\ .$$

4. *Sei $\{e_i\}$ eine lokale Ortho-normal-Basis, definiert auf einer offenen Menge $U \subset M$. Dann gilt auf U:*

$$\Delta f \;=\; -\sum \left[e_i(e_i(f)) \;-\; (\nabla_{e_i} e_i) f\right]\ .$$

5. *In lokalen Koordinaten (U, x) gilt:*

$$\Delta f \;=\; -\,\bar{g}^{-\frac{1}{2}} \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij} \cdot \bar{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\ .$$

6. *Sei e_i eine Ortho-normal-Basis in T_pM und seien γ_i Geodätische durch p mit $\dot{\gamma}_i(0) = e_i$. Dann gilt in p:*

$$\Delta f \;=\; -\sum \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (f \circ \gamma_i)(t)\ .$$

Beweis:

□

Bemerkungen:

1. Der Laplace-Operator Δ auf Funktionen ist ein elliptischer Differential-Operator 2. Ordnung. Auf kompakten Mannigfaltigkeiten hat Δ ein diskretes Spektrum, die Eigenwerte haben endliche Vielfachheit, die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Mehr dazu im folgenden Abschnitt.

2. Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Standardmetrik schreibt sich als:

$$\Delta f \;=\; \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

3. Auch in geodätischen Normalkoordinaten schreibt sich der Laplace-Operator wie in Gleichung (1.1)

Als Folgerung aus Satz1.20 erhält man Aussagen über den Laplace-Operator in verschiedenen speziellen Situationen.

Folgerung 1.21 *Seien f und h zwei glatte Funktionen auf M. Dann berechnet sich der Laplace-Operator der Produktfunktion $f \cdot h$ als*

$$\Delta(f \cdot h) \;=\; \Delta f \cdot h \;+\; f \cdot \Delta h \;-\; 2\, g(df, dh)\ .$$

Beweis:

□

Folgerung 1.22 *Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit zugehörigen Laplace-Operatoren Δ^M bzw. Δ^N. Sei weiter $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ eine Isometrie, dann gilt für beliebige glatte Funktionen f auf N*

$$\Delta^M(f \circ \varphi) \;=\; (\Delta^N f) \circ \varphi\ .$$

Beweis:

□

Folgerung 1.23 *Sei $\pi : (M, g) \to (N, h)$ eine Riemannsche Submersion mit totalgeodätischen Fasern. Dann gilt für beliebige glatte Funktionen f auf N:*

$$\Delta^M(f \circ \varphi) \;=\; (\Delta^N f) \circ \varphi\ .$$

Beweis:

□

Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $(M \times N, g \oplus h)$ das Riemannsche Produkt. Dann hat man trivialerweise folgende Riemannsche Submersionen mit totalgeodätischen Fasern

$$\mathrm{pr}_M : M \times N \to M,\ (m, n) \mapsto m, \qquad \text{und} \qquad \mathrm{pr}_N : M \times N \to N,\ (m, n) \mapsto n$$

Satz 1.24 *Sei a eine Funktion auf M und b eine Funktion auf N. Dann ist durch $(a \circ \mathrm{pr}_M) \cdot (a \circ \mathrm{pr}_N)$ eine Funktion auf $M \times N$. Der Laplace-Operator berechnet sich als*

$$\Delta^{M \times N}[(a \circ \mathrm{pr}_M) \cdot (a \circ \mathrm{pr}_N)] \;=\; (\Delta^M a \circ \mathrm{pr}_M) \cdot (b \circ \mathrm{pr}_N) \;+\; (a \circ \mathrm{pr}_M) \cdot (\Delta^N b \circ \mathrm{pr}_N)\ .$$

Beweis:

□

Als unmittelbare Konsequenz aus Satz 1.24 ergibt sich

Folgerung 1.25 *Sei a eine Δ^M-Eigenfunktion zum Eigenwert λ und b eine Δ^N-Eigenfunktion zum Eigenwert μ. Dann ist $(a \circ \mathrm{pr}_M) \cdot (a \circ \mathrm{pr}_N)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda + \mu$.*

Bemerkung: Später wird gezeigt, dass man auf diese Art alle $\Delta^{M \times N}$-Eigenfunktionen erhält.

1.4 Hauptsymbol von Differentialoperatoren

Seien E und F Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Die glatten Schnitte von E bezeichnen wir mit $\Gamma(E)$.

Definition 1.26 *Ein* Differential-Operator der Ordnung k *ist eine lineare Abbildung* $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$*, so dass um jeden Punkt von* M *lokale Koordinaten* (U,x) *und lokale Trivialisierungen* $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^p, F|_U \cong U \times \mathbb{R}^q$ *existieren, bezüglich der* P *geschrieben werden kann als*

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \tag{1.2}$$

wobei

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, *mit* $n = \dim M$
- $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$
- A_α *ist eine* $q \times p$*-Matrix von glatten Funktionen auf* U
- *mindestens ein* $A_\alpha(x)$ *mit* $|\alpha| = k$ *ist ungleich* 0*.*

Bemerkung: Durch die lokale Trivialisierung gibt es eine Identifikation $\Gamma(E|_U) = [\mathcal{C}^\infty(U)]^p$. Man definiert einen Operator $\tilde{P}$ durch folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C}^\infty(U)]^p} \arrow[r, "\tilde{P}"] & {[\mathcal{C}^\infty(U)]^q} \\
\Gamma(E|_U) \arrow[r, "P"] \arrow[u, "="'] & \Gamma(F|_U) \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{P} f = \sum A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}.$$

Definition 1.27 *Das* Hauptsymbol *eines Differential-Operators* $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *ist die Abbildung, die jedem* $x \in M$ *und* $\xi \in T_x^* M$ *eine lineare Abbildung*

$$\sigma_\xi(P)\colon E_x \longrightarrow F_x$$

zuordnet, definiert durch

$$\sigma_\xi(P) = \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

wobei P *lokal durch Gleichung* (1.2) *beschrieben ist und in den lokalen Koordinaten* (U,x)

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$$
$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Bemerkung: Diese Definition ist abhängig von lokalen Koordinaten und Trivialisierungen.

Definition 1.28 *Ein Differential-Operator* $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *heißt* elliptisch*, falls für alle* $x \in M$ *und* $\xi \neq 0$ *das Hauptsymbol* $\sigma_\xi(P)\colon E_x \to F_x$ *ein Isomorphismus ist. Diese Definition ist unabhängig von lokalen Koordinaten und Trivialisierungen.*

Beispiel: Seien E und F triviale Geradenbündel, d.h. $\Gamma(E) \cong \mathcal{C}^\infty(M)$ und analog für F, und $P = \Delta\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ der Laplace-Operator. Es gilt in orientierten lokalen Koordinaten die Formel:

$$\Delta f = -(\bar{g})^{-\frac{1}{2}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{g}^{\frac{1}{2}} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right),$$

wobei $\bar{g} = \det(g_{ij})$ und g^{jk} die zu g_{ij} inverse Matrix ist. Daraus folgt:

$$\Delta f = -\sum_{j,k} g^{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \text{Terme niedrigerer Ordnung.}$$

Damit ist

$$\sigma_\xi(\Delta) = -\sum_{j,k} g^{jk} \xi_j \xi_k = -g(\xi, \xi) = -||\xi||^2.$$

D.h. $\sigma_\xi(\Delta)$ ist die Multiplikation mit $-||\xi||^2$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Da das für alle $\xi \neq 0$ eine invertierbare lineare Abbildung ist, folgt dass der Laplace-Operator elliptisch ist.

Bemerkung: Die Koeffizienten $A_\alpha(x)$ haben bei Koordinatenwechsel bzw. Wechsel der Trivialisierungen ein Transformationsverhalten, das zeigt, dass $\{A_\alpha\}_{|\alpha|=k}$ einen wohldefinierten Schnitt $\sigma(P)$ im Vektorbündel $\mathrm{Sym}^k TM \otimes \mathrm{Hom}(E, F)$ definiert. Dabei ist $\mathrm{Sym}^k T_x M$ der Raum der homogenen Polynome vom Grad k auf $T_x^* M$. Man bekommt $\sigma_\xi(P)$ aus $\sigma(P)$ durch Einsetzen von ξ.

Lemma 1.29 *Seien* $P_a\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$*,* $a = 1, 2$*, und* $Q\colon \Gamma(F) \to \Gamma(G)$ *Differential-Operatoren vom gleichen Grad. Dann gilt für* $\xi \in T_x^* M$ *und* $t_a \in \mathbb{R}$*:*

$$\sigma_\xi(t_1 P_1 + t_2 P_2) = t_1 \sigma_\xi(P_1) + t_2 \sigma_\xi(P_2)$$
$$\sigma_\xi(Q \circ P) = \sigma_\xi(Q) \circ \sigma_\xi(P).$$

Definition 1.30 *Sei* $f\colon N \to M$ *eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und* $p\colon E \to M$ *ein Vektorbündel. Dann ist das* zurückgezogene Bündel $f^*E \to N$ *definiert durch*

$$f^*E = \{(n, e) \in N \times E \mid f(n) = p(e)\}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist mit

$$p'(n, e) = n$$
$$g(n, e) = e.$$

Bemerkungen:

- Sei $M_0 \overset{i}{\hookrightarrow} M$ eine Untermannigfaltigkeit und $E \to M$ ein Vektorbündel. Dann gilt $E|_{M_0} \cong i^*E$.
- Diese Konstruktion tritt in der Klassifikation von Vektorbündeln auf. Sei $E \to M$ ein beliebiges Vektorbündel vom Rang p über einer Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann existiert eine Abbildung $f\colon M \to \mathrm{Gr}_p(\mathbb{R}^{n+p})$, eindeutig bis auf Homotopie, und ein universelles Vektorbündel $Q \to \mathrm{Gr}_p(\mathbb{R}^{n+p})$ über der Grassmannschen, so dass $E = f^*Q$. Der Raum aller Vektorbündel über M ist isomorph zu dem Raum aller Homotopieklassen von Abbildungen in die Grassmannsche, $\mathrm{Vekt}_p(M) \cong [M, \mathrm{Gr}_p(\mathbb{R}^{n+p})]$.

Seien E und F Vektorbündel über M und sei $N = T^*M \setminus$ Nullschnitt das Bündel der nichtverschwindenden Kotangentialvektoren mit der kanonischen Projektion $\pi\colon N \to M, \pi(\xi) = x$, für $\xi \in T_x^*M$.

Lemma 1.31 *Das Hauptsymbol eines Differential-Operators $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ definiert einen Bündelmorphismus $\sigma(P)\colon \pi^*E \to \pi^*F$ von Vektorbündeln über N, d.h. man hat faserweise eine lineare Abbildung*

$$\sigma_\xi(P)\colon E_x \to F_x, \quad \xi \in T_x^*M, \xi \neq 0,$$

gegeben durch

$$\sigma_\xi(P)(e) = P\left(\frac{1}{k!}u^k \cdot s\right)(x), \tag{1.3}$$

wobei $e \in E_x$ und $u \in \mathcal{C}^\infty(M), s \in \Gamma(E)$ so gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} du_x &= \xi, u(x) = 0 \\ s(x) &= e. \end{aligned}$$

Beispiel: Für

$$P\colon [\mathcal{C}^\infty(U)]^p \to [\mathcal{C}^\infty(U)]^q$$

mit

$$\sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha},$$

folgt mit Gleichung (1.3), dass

$$\sigma_\xi(P) = \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

da alle anderen Terme wegfallen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(u \cdot s)(x) &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)s(x) + u(x)\frac{\partial s}{\partial x_i}(x) \\ &= \xi_i \cdot e \end{aligned}$$

mit $u(x)=0, s(x)=e, du=\xi$. Analog folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(u^2 \cdot s)(x) = 2\xi_i\xi_j \cdot e.$$

Beispiel: Wir betrachten das Differential $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ auf k-Formen:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(d)\omega_x &= d(u\cdot\omega)(x) = du_x \wedge \omega_x + u(x)d\omega(x)\\ &= \xi \wedge \omega_x,\end{aligned}$$

mit $du=\xi, u(x)=0, \omega(x)=\omega_x$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(d)\colon \Lambda^k T_x^* M &\longrightarrow \Lambda^{k+1}T_x^*M\\ \omega &\longmapsto \xi\wedge\omega.\end{aligned}$$

Analog ist für $d^*\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$

$$\begin{aligned}d^*(u\cdot\omega) &= -\sum_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i}(u\omega)\\ &= -\sum_i e_i \lrcorner (L_{e_i}u\cdot\omega + u\nabla_{e_i}\omega)\\ &= -\operatorname{grad} u \lrcorner \omega + u d^*\omega.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sigma_\xi(d^*)\omega_x = d^*(u\cdot\omega)(x) = -\operatorname{grad} u\lrcorner\omega$$

d.h.

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(d^*)\colon \Lambda^k T_x^* M &\longrightarrow \Lambda^{k-1}T_x^*M\\ \omega &\longmapsto -\xi^\sharp\lrcorner\omega.\end{aligned}$$

Wir betrachten den Laplace-Operator $\Delta = d^*d + dd^*$ auf k-Formen. Mit Lemma 1.29 folgt:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(\Delta)\omega_x &= -\xi^\sharp\lrcorner(\xi\wedge\omega_x) - \xi\wedge(\xi^\sharp\lrcorner\omega_x)\\ &= -||\xi||^2\omega_x + \xi\wedge(\xi^\sharp\lrcorner\omega_x) - \xi\wedge(\xi^\sharp\lrcorner\omega_x)\\ &= -||\xi||^2\omega_x.\end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\sigma_\xi(\Delta) = -||\xi||^2\cdot\colon \Lambda^k T_x^*M \to \Lambda^k T_x^* M$$

d.h. Δ ist ein elliptischer Operator.

Beispiel: Wir können das Symbol der Laplace-Operators $\Delta\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ auf Funktionen auch direkt mit Lemma 1.31 und einer Formel für den Laplace-Operator, angewandt auf ein Produkt von Funktionen, berechnen: Mit $s(x) = e, du(x) = \xi, u(x) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma_\xi(\Delta)e &= \Delta\left(\frac{1}{2}u^2 s\right) \\
&= \frac{1}{2}(\Delta u^2 \cdot s + u^2\Delta s - 2d(2udu, ds)) \\
&= \frac{1}{2}(\Delta u^2 \cdot e) \\
&= \frac{1}{2}(2u\Delta u - 2g(du, du))e \\
&= -||\xi||^2 e.
\end{aligned}$$

1.5 Eigenschaften elliptischer Operatoren

Ein Differentialoperator P ist genau dann elliptisch, wenn das Hauptsymbol $\sigma_\xi(P)$ ein Isomorphismus ist. Zum Beispiel ist der Laplace-Operator Δ auf Formen elliptisch.

Bemerkung: Δ ist selbst-adjungiert und nicht-negativ.

Bezeichnung: Für einen Differentialoperator $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ sei

$$E_\lambda = \ker(P - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$$

der Eigenraum zum Eigenwert λ.

Satz 1.32 *Sei M kompakt, $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ elliptisch und selbst-adjungiert. Dann gilt:*

1. *Jeder Eigenraum E_λ ist endlich-dimensional, Eigenschnitte in $L^2(E)$ sind glatt.*
2. *Die Eigenwerte sind reell, diskret, wachsen gegen $\pm\infty$.*
3. *Die Eigenräume von P bilden ein vollständiges Orthonormalsystem, d.h. $L^2(E)$ ist die Hilbertsumme $\bigoplus_\lambda E_\lambda$.*
4. *Man hat eine L^2-orthogonale Zerlegung $\Gamma(E) = ker P \oplus im P$. Insbesondere gilt für $P = \Delta$ auf $\Omega^k(M)$:*

$$\Omega^k(M) = \ker \Delta \oplus \mathrm{im}\, d \oplus \mathrm{im}\, d^*,$$

wobei $ker \Delta$ die harmonischen Formen sind und $\mathrm{im}\, d \oplus \mathrm{im}\, d^* = \mathrm{im}\, \Delta$. Außerdem ist für Δ wegen der Nicht-Negativität:

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

Bemerkung: Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit gilt:

$$\omega \in \ker \Delta \Leftrightarrow d\omega = 0, d^*\omega = 0,$$

da

$$\begin{aligned}
\Delta\omega = 0 &\Leftrightarrow dd^*\omega + d^*d\omega = 0 \\
&\Rightarrow (dd^*\omega + d^*d\omega, \omega) = 0 \\
&\Rightarrow ||d^*\omega||^2 + ||d\omega||^2 = 0 \\
&\Rightarrow d\omega = 0, d^*\omega = 0.
\end{aligned}$$

2 Parallelverschiebung

Definition 2.1 *Ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c : I \to M$ ist eine glatte Abbildung*

$$X : I \to TM$$

mit $X(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

Beispiele:

1. Das Geschwindigkeitsvektorfeld einer Kurve c, also $X(t) = \dot{c}(t)$ ist ein Vektorfeld entlang c.
2. Sei X ein Vektorfeld auf M, dann definiert die Einschränkung von X auf die Kurve c ein Vektorfeld entlang c. Man schreibt

$$X_c(t) := X_{c(t)}$$

Bemerkungen:

1. Ein Vektorfeld entlang einer Kurve kann im Allgemeinen nicht zu einem Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit fortgesetzt werde. Man hat keine Eindeutigkeit in Punkten, in denen sich die Kurve überschneidet.
2. Die Menge der Vektorfelder entlang einer Kurve $c : I \to M$ wird mit $\chi(c)$ bezeichnet. Es ist ein unendlich-dimensionaler reeller Vektorraum und ein Modul über $\mathcal{C}^\infty(I)$

Ein Zusammenhang ∇ induziert nun einen Ableitungsoperator auf Vektorfeldern entlang von Kurven. Diese Ableitung beschreibt die infinitesimale Änderung von $X \in \chi(c)$ entlang von c.

Satz 2.2 *Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang ∇ und $c : I \to M$ eine Kurve in M. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung*

$$\frac{\nabla}{dt} : \chi(c) \to \chi(c)$$

mit den folgenden Eigenschaften

1. *Die Abbildung $\frac{\nabla}{dt}$ ist $\mathbb{R}$-linear.*
2. *Es gilt die Leibnitz-Regel:* $\frac{\nabla}{dt}(f \cdot X) = \frac{df}{dt} \cdot X + f \cdot \frac{\nabla}{dt} X$, $\quad f \in \mathcal{C}^\infty(I), X \in \chi(c)$
3. *Für auf c eingeschränkte Vektorfelder gilt:* $\frac{\nabla}{dt} X_c = \nabla_{\dot{c}(t)} X$, *für alle $X \in \chi(M)$*

Beweis:

$\square$

Bemerkung: Für die kovariante Ableitung von Vektorfeldern entlang einer Kurve c schreibt man auch:

$$\frac{\nabla}{dt}X \;=\; \dot{X} \;=\; \nabla_{\dot{c}}X$$

Insbesondere verwendet man im Fall des Geschwindigkeits-Vektorfeldes $X = \dot{c}$ die Schreibweise $\frac{\nabla}{dt}X = \ddot{c}$, für das Beschleunigungs-Vektorfeld der Kurve.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Zusammenhang $\nabla_X Y = X(Y)$. Dann schreibt sich ein Vektorfeld $X \in \chi(c)$ als $X(t) = \sum f_i(t)e_i$, wobei $\{e_i\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ ist. Da die Christoffel-Symbole für den kanonischen Zusammenhang verschwinden folgt

$$\frac{\nabla}{dt}X \;=\; \sum \frac{df_i}{dt}\, e_i \;=\; \dot{X}(t)$$

Definition 2.3 *Ein Vektorfeld $X \in \chi(c)$ heißt* parallel *entlang c, falls:*

$$\frac{\nabla}{dt}X \;\equiv\; 0\ .$$

Man sagt auch: X ist parallel verschoben *entlang c.*

Beispiel: Für $M = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Zusammenhang ist ein Vektorfeld $X \in \chi(c)$ genau dann parallel entlang c, wenn $\dot{X} = 0$ gilt, d.h wenn X konstant entlang c ist.

Satz 2.4 *Sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve und $X_0 \in T_{c(0)}M$ ein fixierter Tangentialvektor. Dann existiert genau ein paralleles Vektorfeld X entlang c mit $X(0) = X_0$.*

Beweis: Die lokale Formel (**??**) zeigt, dass sich die Parallelitätsbedingung $\frac{\nabla}{dt}X = 0$ in ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen übersetzt. Es ist von der Form $\dot{v}(t) = A(t)v(t)$.
Daher existiert lokal eine durch den Anfangswert eindeutig bestimmte Lösung. $\square$

Definition 2.5 *Als* Parallelverschiebung *oder auch Paralleltransport von $X_0 \in T_{c(0)}M$ entlang der Kurve c, bezeichnet man die Abbildung*

$$P_c^{\nabla} = P_c^{\nabla}(c(0), c(t))\ :\ T_{c(0)}M \longrightarrow T_{c(t)}M, \quad X_0 \longmapsto X(t)\ ,$$

die X_0 das eindeutig bestimmte parallele Vektorfeld $X(t)$ mit $X(0) = X_0$ zuordnet.

Beispiel: Für $M = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Zusammenhang erhält man die gewöhnliche Parallelverschiebung bzw. Translation von Vektoren in $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.6 *Die Parallelverschiebung entlang einer Kurve c hat folgende Eigenschaften:*

1. *Die Abbildung $P_c^\nabla = P_c^\nabla(c(0), c(t)) : T_{c(0)}M \longrightarrow T_{c(t)}M$ ist ein linearer Isomorphismus.*

2. *Der Zusammenhang ∇ ist genau dann metrisch, wenn die Parallelverschiebung P_c^∇ entlang aller Kurven c ein Isometrie ist. Insbesondere gilt im Fall, dass ∇ metrisch ist die Formel*

$$\tfrac{d}{dt}\, g(X,Y) \;=\; g(\tfrac{\nabla}{dt}X, Y) \;+\; g(X, \tfrac{\nabla}{dt}Y)$$

   für beliebige Vektorfelder X, Y entlang einer Kurve c.

Beweis:

□

Bemerkungen:

1. Aus der Parallelverschiebung läßt sich der Zusammenhang zurückkonstruieren. Man hat dafür eine explizite Formel.

2. Die Parallelverschiebung hängt im Allgemeinen von der Kurve ab. Wenn nicht, könnte man auf S^2 ein Vektorfeld ohne Nullstellen konstruieren, was nicht möglich ist. Insbesondere ist für geschlossene Kurven c die Parallelverschiebung P_c^∇, i.A. nicht die Identität. Dies gilt allerdings für die Parallelverschiebung zum kanonischen Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$. Es stellt sich heraus, dass die Nichttrivialität von P_c^∇ ein Maß für die Krümmung der Mannigfaltigkeit ist.

3. Die Parallelverschiebung hängt nicht von der Parametrisierung der Kurve ab.

4. Die Parallelverschiebung ist auch für stückweise glatte Kurven definiert. Die Abbildungen P_c^∇ setzen sich fort zu einer Parallelverschiebung von Tensoren.

3 Geodätische

Definition 3.1 *Eine Kurve $c : I \to M$ heißt* Geodätische*, falls*

$$\frac{\nabla}{dt}\dot c \;\equiv\; 0$$

d.h. falls das Geschwindigkeits-Vektorfeld $\dot c$ parallel ist.

Aus der expliziten Formel für die kovariante Ableitung von Vektorfeldern entlang einer Kurve c erhält man eine Formulierung der Geodäten-Gleichung in lokalen Koordinaten.

Lemma 3.2 *Eine Kurve $c : I \to M$ ist genau dann eine Geodätische, wenn sie lokal Lösung von folgendem System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung ist:*

$$\ddot c_k \;+\; \sum_{i,j} \Gamma_{i\,j}^k\, \dot c_i\, \dot c_j \;=\; 0 \qquad \textit{für} \quad k = 1, \dots, n\ .$$

Aus der Beschreibung von Geodätischen als Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichung erhält man verschiedene Eigenschaften. Zunächst hat man eine lokale Existenz.

Lemma 3.3 *Zu jedem Tangentialvektor $v \in T_pM$ existiert ein Intervall I um Null und eine eindeutig bestimmte Geodätische $c_v : I \to M$ mit $c_v(0) = p$ und $\dot{c}_v(0) = v$.*

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Metrik g_0 und dem flachen Zusammenhang. Dann verschwinden alle Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k und eine Kurve $c = (c_1, \ldots, c_n)$ ist genau dann eine Geodätische, wenn

$$\ddot{c}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_k(t) = p_k + tv_j \quad \Leftrightarrow \quad c(t) = p + tv \ ,$$

d.h. Geodätische auf $(\mathbb{R}^n, g_0)$ sind die Geraden parametrisiert konstant zur Bogenlänge (also mit konstanter Geschwindigkeit).

Beispiel: Sei $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Standard-Sphäre. Es stellt sich heraus, dass die Geodätischen genau die Großkreise sind, also Schnitte von S^n mit Ebenen durch die Null. Sei E eine Ebene durch Null, $E = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ mit $v_1, v_2 \in S^n$ orthogonal, dann ist der Großkreis $S^n \cap E$ parametrisiert durch

$$c(t) \ = \ \cos t \ v_1 \ + \ \sin t \, v_2 \ .$$

Um zu zeigen, dass alle Geodätische auf S^n von dieser Form sind, untersucht man zuerst etwas allgemeiner Geodätische auf Riemannschen Untermannigfaltigkeiten.

Beispiel: Sei G ein zusammenhängende Lie-Gruppe mit einer biinvarianten Metrik. Dann sind die Geodätischen durch das Einselement e genau die 1-parametrigen Untergruppen von G, d.h. von der Form $\gamma(t) = \exp tX$ für ein $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Alle anderen Geodätischen ergeben sich durch Linkstranslation dieser Kurven

3.1 Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten

Sei $(\bar{M}, \bar{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $M \subset \bar{M}$ eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei g die induzierte Metrik auf M und bezeichne $\bar{\nabla}$ den Levi-Civita-Zusammenhang zu $\bar{g}$ und ∇ den zu g. Dann gilt für Tangentialvektoren X, Y an M die Formel

$$\bar{\nabla}_X Y \ = \ \nabla_X Y \ + \ \mathrm{II}\,(X, Y) \ .$$

Dies ist genau die Zerlegung in tangentialen und normalen Teil. Der normale Teil $II(X, Y)$ ist durch die 2. Fundamentalform gegeben.

Lemma 3.4 *Sei Y ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c : I \to M$. Dann gilt für die von $\bar{\nabla}$ bzw. ∇ induzierte kovariante Ableitung auf $\chi(c)$:*

$$\tfrac{\bar{\nabla}}{dt} Y \ = \ \tfrac{\nabla}{dt} Y \ + \ \mathrm{II}\,(\dot{c}, Y) \ .$$

Beweis:

□

Im Spezialfall $Y = \dot{c}$ erhält man daraus eine Charakterisierung von Geodätischen in Untermannigfaltigkeiten.

Folgerung 3.5 *Eine Kurve $c : I \to M$ ist genau dann Geodätische, wenn $\ddot{c} = \frac{\bar{\nabla}}{dt}c$ normal zu M ist.*

Mit dieser Folgerung läßt sich nun auch zeigen, dass die Geodätischen auf der Standard-Sphäre genau die Großkreise sind.

1. Großkreise auf S^n sind Geodätische.

   Ein Großkreis $S^n \cap E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei durch c nach Bogenlänge parametrisiert. Dann liegen $c, \dot{c}$ und $\ddot{c}$ in der Ebene E. Da c eine Kurve in S^n ist, folgt $\|c\|^2 = 1$ und das Ableiten dieser Gleichung ergibt $c \perp \dot{c}$. Analog liefert die Gleichung $\|\dot{c}\|^2 = 1$ die Beziehung $\dot{c} \perp \ddot{c}$. Daher zeigt $\ddot{c}$ in die Richtung von c und ist somit normal, denn $T_pS^n = p^\perp$. Der Großkreis $S^n \cap E$ ist also eine Geodätische auf S^n.

2. Geodätische auf S^n sind Großkreise.

   Sei $c : I \to S^n$ eine Geodätische. Dann betrachtet man die Ebene $E = \mathrm{span}\{c(0), \dot{c}(0)\}$. Der Schnitt mit S^n liefert den Großkreis und damit die Geodätische

   $$\sigma(t) \; = \; \cos t\, c(0) \; + \; \sin t\, \dot{c}(0) \qquad \text{mit} \quad \sigma(0) = c(0),\ \dot{\sigma}(0) = \dot{c}(0) \; .$$

   Die Anfangswerte der Geodätischen σ und c stimmen überein und damit auch die Geodätischen, d.h. jede Geodätische auf S^n ist ein Großkreis.

Definition 3.6 *Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \bar{M}$ heißt* total-geodätisch*, falls die 2. Fundamentalform verschwindet, d.h. falls $\mathrm{II} \equiv 0$ gilt.*

Satz 3.7

Lemma 3.8

3.2 Eigenschaften von Geodätischen

Lemma 3.9 *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem metrischen Zusammenhang ∇. Dann ist für jede Geodätische c die Längen-Funktion $f(t) = g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ konstant entlang c, d.h. Geodätische sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis: Da der Zusammenhang ∇ metrisch ist, ergibt sich die Behauptung aus folgender Rechnung:

$$\tfrac{df}{dt} \; = \; \tfrac{d}{dt}\, g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \; = \; 2\, g(\tfrac{\nabla}{dt}\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \; = \; 0 \; .$$

□

Bemerkungen:

1. Für Lorentz-Metriken unterscheidet man: raumartige ($\|\dot{c}\| > 0$), lichtartige ($\|\dot{c}\| = 0$) und zeitartige ($\|\dot{c}\| < 0$) Geodätische.

2. Geodätische werden mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

3. Die Eigenschaft Geodätische zu sein hängt von der Parametrisierung ab. Kurven, die nach Umparametrisierung Geodätische werden nennt man *Prägeodätische.*

3.3 Die Exponentialabbildung

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt:

Lemma 3.10 *Sei $v \in T_pM$ ein beliebiger Vektor. Dann existiert eine Umgebung U von v in T_pM und ein Intervall I um Null, so dass*

$$\begin{aligned} U \times I &\longrightarrow M, \\ (w, s) &\longmapsto \gamma_w(s) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte glatte Abbildung ist. Dabei bezeichnet γ_w die Geodätische mit Anfangswerten $\gamma_w(0) = p, \dot{\gamma}_w(0) = w$.

Definition 3.11 *Sei $p \in M$ und U_p die Menge der Vektoren v in T_pM, für welche die Geodätische γ_v auf ganz $[0, 1]$ definiert ist. Die Abbildung*

$$\exp_p : U_p \to M,$$

definiert durch $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, heißt Exponentialabbildung.

Bemerkungen:

1. Nach Lemma 3.10 enthält die Menge U_p eine offene Umgebung von Null (Skalierung).

2. Es gilt $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$, da $s \mapsto \gamma_v(ts)$ eine Geodätische mit Anfangsgeschwindigkeit tv ist: $\gamma_v(ts) = \gamma_{tv}(s)$. Für $s = 1$ folgt $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$.

Satz 3.12 *Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung $\tilde{U}$ von Null in T_pM, auf der $\exp_p : \tilde{U} \to U = \exp_p(\tilde{U})$ ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung U von p in M ist.*

Beweis: Nach Lemma 3.10 ist $\exp_p$ wohldefiniert und glatt auf einer kleinen Umgebung von Null in T_pM. Wir berechnen das Differential dieser Abbildung in Null:

$$(d\exp_p)_0 : T_0(T_pM) \cong T_pM \to T_pM$$

Es gilt für $v_0 \in T_pM$:

$$(d\exp_p)_0(v_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp_p(tv_0) = v_0.$$

D.h. $(d\exp_p)_0$ ist die Identität von T_pM. Damit ist $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus um die Null. $\square$

Definition 3.13 *Sei* $\tilde{U} \subset T_pM$ *eine sternförmige Umgebung von Null in* T_pM*, so dass* $\exp_p\colon \tilde{U} \to U = \exp_p(\tilde{U})$ *ein Diffeomorphismus ist. Dann nennt man* U *eine* normale Umgebung *von* p*. Dabei heißt eine Umgebung von Null in einem Vektorraum sternförmig, falls jede Gerade von Null zu einem Punkt in dieser Umgebung ganz in der Umgebung enthalten ist.*

Satz 3.14 *Sei* U *eine normale Umgebung von* p*. Dann existiert für jeden Punkt* $q \in U$ *eine eindeutige Geodätische* $\sigma\colon [0,1] \to U$ *mit* $\sigma(0) = p, \sigma(1) = q$*. Weiter gilt* $\dot{\sigma}(0) = \exp_p^{-1}(q)$*.*

Beweis: Existenz: Die Exponentialabbildung $\exp_p\colon \tilde{U} \subset T_pM \to U \subset M$ ist ein Diffeomorphismus. Sei $v = \exp_p^{-1}(q) \in T_pM$ für den Punkt $q \in U$. Dann ist $\rho(t) = tv$ in $\tilde{U}$ für alle $t \in [0,1]$, da $\tilde{U}$ sternförmig ist. Sei

$$\sigma(t) = \exp_p \rho(t) = \exp_p(tv).$$

Dann ist $\sigma(t)$ eine Geodätische mit $\sigma(0) = p, \sigma(1) = q, \dot{\sigma}(0) = v = \exp_p^{-1}(q)$.

Eindeutigkeit: Sei $\tau\colon [0,1] \to U$ eine andere Geodätische in U mit $\tau(0) = p, \tau(1) = q$. Sei $w = \dot{\tau}(0)$. Die Geodätische $t \mapsto \exp_p(tw)$ hat dieselben Anfangswerte wie τ. Nach der Eindeutigkeit ist $\tau(t) = \exp_p(tw)$. Da $\exp_p^{-1} \circ \tau$ in $\tilde{U}$ liegt, ist $w \in \tilde{U}$. Es gilt

$$\exp_p(w) = \tau(1) = q = \exp_p(v).$$

Da $\exp_p$ ein Diffeomorphismus auf $\tilde{U}$ ist, folgt dass $w = v$ ist. Dann ist $\tau = \sigma$. □

Bezeichnung: Eine Kurve γ heißt *gebrochene Geodätische*, falls γ stückweise glatt ist und die glatten Stücke Geodätische sind.

Beispiel: Im $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik sind die gebrochenen Geodätischen gerade die Polygonzüge.

Lemma 3.15 *Sei* (M, g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Mannigfaltigkeit* M *zusammenhängend, genau dann, wenn je zwei Punkte in* M *durch eine gebrochene Geodätische verbunden werden können.*

Beweis: Die eine Richtung ist klar. Sei M zusammenhängend und $x \in M$ ein beliebiger fester Punkt. Sei

$$C = \{y \in M \mid \text{es gibt eine gebrochene Geodätische, die } x \text{ und } y \text{ verbindet}\}.$$

Es gilt:

- C ist nicht leer, da $x \in C$.
- Die Menge C ist offen: Sei $y \in C$ und $U(y)$ eine normale Umgebung von y. Für alle $z \in U(y)$ existiert eine Geodätische von y nach z und damit eine gebrochene Geodätische von x nach z. D.h. $z \in C$ und damit $U(y) \subset C$.

- Die Menge C ist abgeschlossen: Sei $y \in M \setminus C$ und $U(y)$ eine normale Umgebung von y. Sei $z \in U(y)$. Falls $z \in C$, wäre auch $y \in C$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $U(y) \subset M \setminus C$.

Da M zusammenhängend ist und C offen, abgeschlossen und nicht leer, folgt dass $M = C$. □

3.4 Normalkoordinaten

Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, U eine normale Umgebung von p und $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von T_pM.

Definition 3.16 *Die* Normalkoordinaten *auf U sind definiert durch*

$$\begin{aligned} x\colon U &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ q &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

mit $\exp_p^{-1}(q) = \sum_{i=1}^n x_i(q) e_i$.

Satz 3.17 *In Normalkoordinaten um p gilt:*

1. $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, *da* $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = e_i$.
2. $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, *d.h.* $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$.

Beweis:

1. Sei f_i der i-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt wegen $x(p) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x^{-1}(tf_i) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p(te_i) \\ &= e_i. \end{aligned}$$

2. Man betrachtet die Geodätische $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ mit $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Dann gilt für die i-te Koordinate

$$\begin{aligned} \gamma_{v,i}(t) = x_i(\gamma_v(t)) &= ta_i \\ \dot{\gamma}_{v,i} = a_i, \ddot{\gamma}_{v,i} &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Geodätengleichung ist

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(p) a_i a_j = 0$$

für alle $(a_1, \ldots, a_n)$ in einer kleinen Umgebung von Null und nach Skalierung für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ für alle Indices i, j, k.

□

3.5 Die erste Variationsformel

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang ∇ und $F\colon \mathbb{R}^2 \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Dann hat man zwei Kurvenscharen:

$$\begin{aligned} s &\longmapsto F(s,t) \quad (t \text{ fest}) \\ t &\longmapsto F(s,t) \quad (s \text{ fest}) \end{aligned}$$

und dementsprechend zwei kovariante Ableitungen $\frac{\nabla}{ds}, \frac{\nabla}{dt}$.

Lemma 3.18 *Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einem torsionsfreien Zusammenhang ∇. Dann gilt*

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial F}{\partial s}.$$

Beweis: In lokalen Koordinaten (U, x) gilt:

$$\begin{aligned} x \circ F &= (F_1, \ldots, F_n) \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial F}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\nabla}{ds}\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial s \partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial F_i}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial F}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial s \partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial t}\frac{\partial F_j}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial F}{\partial s}, \end{aligned}$$

nach dem Satz von Schwarz und wegen $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$, da ∇ torsionsfrei ist. $\square$

Bezeichnung: Eine *Variation* einer Kurve $\gamma\colon [a,b] \to M$ ist eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] &\longrightarrow M, \\ (s,t) &\longmapsto \gamma_s(t), \end{aligned}$$

mit $\gamma_0(t) = \gamma(t)$. Man setzt $\delta = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}$.

Satz 3.19 *Sei $\gamma\colon [a,b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, d.h. $||\dot\gamma(t)|| \equiv 1$, und sei γ_s eine Variation von γ. Dann gilt für die Variation der Länge von γ_s:*

$$\delta L[\gamma_s] = g(\delta\gamma_s, \dot\gamma)|_a^b - \int_a^b g\left(\delta\gamma_s, \frac{\nabla}{dt}\dot\gamma\right) dt.$$

Bemerkung: Der erste Summand verschwindet, falls die Variation Anfangs- und Endpunkte festläßt, denn dann gilt $\delta\gamma_s(a) = \delta\gamma_s(b) = 0$.

Beweis: Die Länge einer Kurve ist definiert als $L[\gamma_s] = \int_a^b ||\dot\gamma_s(t)||dt$. Es gilt mit Lemma 3.18 und weil der Zusammenhang metrisch ist:

$$\begin{aligned}
\delta||\dot\gamma_s(t)|| &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \sqrt{g(\dot\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t))} \\
&= \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\gamma_s}{\partial t}, \dot\gamma\right) \\
&= g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial\gamma_s}{\partial s}, \dot\gamma\right) \\
&= \frac{d}{dt} g(\delta\gamma_s, \dot\gamma) - g\left(\delta\gamma_s, \frac{\nabla}{dt}\dot\gamma\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\delta L[\gamma_s] = \int_a^b \delta||\dot\gamma_s(t)||dt = g(\delta\gamma_s, \dot\gamma)\big|_a^b - \int_a^b g\left(\delta\gamma_s, \frac{\nabla}{dt}\dot\gamma\right) dt.$$

□

Definition 3.20 *Eine* Kürzeste *zwischen zwei Punkten $x, y \in M$ ist eine Kurve, deren Länge gleich $d(x, y)$ ist.*

Folgerung 3.21 *Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma\colon [a, b] \to M$ mit $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ ist genau dann eine Geodätische, wenn für alle Variationen γ_s mit festen Anfangs- und Endpunkten $\delta L[\gamma_s] = 0$ gilt. Insbesondere folgt: Ist γ eine Kürzeste, dann ist γ eine Geodätische.*

Beweis: Es gilt

$$\delta L[\gamma_s] = -\int_a^b g\left(\delta\gamma_s, \frac{\nabla}{dt}\dot\gamma\right) dt$$

für Variationen γ_s, die Anfangs- und Endpunkte festlassen.

- Ist γ eine Geodätische, so gilt $\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma \equiv 0$ und damit $\delta L[\gamma_s] = 0$.
- Sei γ keine Geodätische. Wir müssen zeigen, dass es eine Variation γ_s gibt, mit $\delta L[\gamma_s] \neq 0$. Da γ keine Geodätische ist, gibt es ein $t_0 \in (a, b)$ mit $\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma(t_0) \neq 0$. Wir werden eine Variation γ_s konstruieren mit

  $$\delta\gamma_s = f \cdot \frac{\nabla}{dt}\dot\gamma,$$

  wobei f eine Funktion auf $[a, b]$ ist mit $f \geq 0$, $f(t_0) > 0$ und $f(a) = f(b) = 0$. Dann folgt

  $$\delta L[\gamma_s] = -\int_a^b f \left|\left|\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma\right|\right| dt < 0.$$

Um die Variation γ_s zu konstruieren, beschränken wir uns auf eine Kartenumgebung (U, x) von $\gamma(t_0)$ und wählen eine beliebige Funktion f mit den oben genannten Eigenschaften, die Träger in dieser Karte hat. Dann setzt man für γ_s eine in s lineare Störung im $\mathbb{R}^n$:

$$\gamma_s(t) = x^{-1}\left(x(\gamma(t)) + sf(t)dx\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}(t)\right)\right).$$

Die Werte von f sollten nicht-negativ und klein genug sein, damit dieser Ausdruck wohldefiniert ist. Es gilt $\gamma_0 = \gamma$. Für die Variation folgt:

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_s(t) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \gamma_s(t) \\
&= dx^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\left((x(\gamma(t)) + sf(t)dx\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}(t)\right)\right)\right) \\
&= dx^{-1}\left(f(t)dx\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}(t)\right)\right) \\
&= f(t)\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}(t).
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

- Je zwei Punkte einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit lassen sich durch eine gebrochene Geodätische verbinden.
- Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Geodätische, falls sie glatt ist.
- Geodätische sind kritische Punkte des Längenfunktionals.

Es stellen sich folgende Fragen:

1. Können je zwei Punkte einer Riemannschen Mannigfaltigkeit durch eine glatte Geodätische verbunden werden?
2. Sind Geodätische Kürzeste? (Das Beispiel der Großkreise auf der runden Sphäre zeigt, dass das nicht immer der Fall ist.)
3. Sind Kürzeste glatt, d.h. sind beliebige Kürzeste Geodätische?

3.6 Das Gauß-Lemma

Der folgende Satz ist der erste Teil des Gauß-Lemmas:

Satz 3.22 *Sei $\epsilon > 0$ so dass $\exp_p$ auf dem Ball $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist und sei $r \in (0, \epsilon)$. Dann gilt für jeden Vektor $v \in T_pM$ mit $||v|| = 1$: Die Geodätische $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ schneidet das Bild $\exp_p(\partial B_r(0))$ der Sphäre vom Radius r im Punkt $\gamma_v(r)$ orthogonal. Mit anderen Worten: $\dot{\gamma}_v(r)$ ist senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{\gamma_v(r)} \exp_p(\partial B_r(0))$.*

Beweis: Sei

$$w \in T_{\gamma_v(r)} \exp_p(\partial B_r(0)) = (d\exp_p)_{rv}(T_{rv}\partial B_r(0))$$

beliebig. Dann ist w von der Form

$$w = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp_p(rv(s)) = \delta\gamma_{v(s)}(r),$$

wobei $v(s)$ eine Kurve in T_pM ist mit $v(0) = v$ und $||v(s)|| = 1$ für alle s. Wir benutzen nun Satz 3.19 über die erste Variationsformel für die Variation $\gamma_{v(s)}$. Da $\gamma_v = \gamma_{v(0)}$ eine Geodätische ist und der Anfangspunkt der Familie von Kurven konstant gleich p ist, folgt

$$\delta L[\gamma_{v(s)}] = g(\delta\gamma_{v(s)}(r), \dot{\gamma}_v(r)) = g(w, \dot{\gamma}_v(r)). \tag{3.4}$$

Andererseits kann man die Länge von $\gamma_{v(s)}$ direkt berechnen:

$$L[\gamma_{v(s)}] = \int_0^r ||\dot{\gamma}_{v(s)}||dt = r||v(s)|| = r.$$

Da dieser Ausdruck konstant ist, folgt dass $\delta L[\gamma_{v(s)}]$ verschwindet. Mit Gleichung (3.4) folgt, dass $g(w, \dot{\gamma}_v(r)) = 0$. Da w beliebig war, folgt die Behauptung. □

Der zweite Teil des Gauß-Lemmas ist folgender Satz:

Satz 3.23 *Die Abbildung* $\exp_p$ *ist eine* radiale Isometrie, *d.h. es gilt*

$$||(d\exp_p)_v w|| = ||w||,$$

für alle v im Definitionsbereich der Exponentialabbildung und alle Vektoren $w \in \mathbb{R}v$.

Beweis: Es gilt

$$(d\exp_p)_v v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p((1+t)v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_v(1+t) = \dot{\gamma}_v(1).$$

Daraus folgt

$$||(d\exp_p)_v v|| = ||\dot{\gamma}_v(1)|| = ||\dot{\gamma}_v(0)|| = ||v||,$$

da γ_v als Geodätische konstante Geschwindigkeit hat. Die Behauptung des Lemmas folgt aus der Linearität des Differentials durch Skalieren. □

Als Konsequenz des Gauß Lemmas erhält man nun, dass Geodätische lokal Kürzeste sind.

Satz 3.24 *Sei $\epsilon > 0$ so dass $\exp_p$ auf dem Ball $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Dann existiert für alle $q \in \exp_p(B_\epsilon(0))$ genau eine Kürzeste γ_{pq} von p nach q und zwar die Geodätische $\gamma_{pq}(t) = \exp_p(tv_q)$ mit $v_q = \exp_p^{-1}(q)$.*

Beweis: Sei $c : [a, b] \to M$ eine beliebige Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Zu zeigen ist, dass $L[c] > L[\gamma_{pq}]$ gilt, oder dass c eine Umparametrisierung von γ_{pq} ist.

Zunächst kann man o.B.d.A. annehmen, dass die Kurve c für alle Zeiten t im Abschluß der Menge $\exp_p(B_R(0)), R = \|v_q\|$, liegt. Sei t_0 die erste Zeit, zu der die Kurve c die Menge $\exp_p(B_R(0))$ verläßt. Dann betrachtet man die kürzere Kurve $c|_{[a,t_0]}$ und schätzt deren Länge ab.

Sei $v(t) \in T_pM$ das Urbild von $c(t)$ unter $\exp_p$, d.h. $\exp_p(v(t)) = c(t)$. Es gilt $v(a) = 0$ und $\|v(t_0)\| = \|v_q\| = R$. Dann definiert man auf $(a, t_0\,]$ Funktionen r und w durch $v(t) = r(t)w(t)$, mit $r(t) = \|v(t)\|$ und $w(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|}$. In a setzt man $r(a) = 0$, weiter hat man $r(t_0) = R$. Das Ableiten nach t liefert dann

$$\dot{v}(t) \;=\; \dot{r}(t)\, w(t) \;+\; r(t)\, \dot{w}(t)\ .$$

Da $w(t)$ senkrecht auf $\dot{w}(t)$ steht, erhält man daraus mit Hilfe des Gauß-Lemmas und Satz 3.23

$$\begin{aligned}\|(d\exp_p)_{v(t)}\, \dot{v}(t)\|^2 \;&=\; \|(d\exp_p)_{v(t)}\, \dot{r}(t)\, w(t)\|^2 \;+\; \|(d\exp_p)_{v(t)}\, r(t)\, \dot{w}(t)\|^2 \\ &\geq\; \|(d\exp_p)_{v(t)}\, \dot{r}(t)\, w(t)\|^2 \;=\; \|\dot{r}(t)\, w(t)\|^2 \;=\; |\dot{r}(t)|^2\end{aligned}$$

Nach dieser Nebenrechnung kann man nun die Länge der Kurve c auf dem Intervall $[a, t_0]$ nach unten abschätzen:

$$L[c|_{[a,t_0]}] = \int_a^{t_0} \|\dot{c}(t)\|\, dt = \int_a^{t_0} \|(d\exp_p)_{v(t)}\, \dot{v}(t)\|\, dt \;\geq \int_a^{t_0} \dot{r}(t)\, dt \;=\; r(t_0) - r(a) = R\ .$$

Auf der anderen Seite berechnet sich die Länge der Geodätischen γ_{pq} als

$$L[\gamma_{pq}] \;=\int_0^1 \|\gamma_{pq}(t)\|\, dt \;=\int_0^1 \|v_q\|\, dt \;= R$$

Damit ist die Länge einer beliebigen, die Punkte p und q verbindenden Kurve, nicht kleiner als die Länge der Geodätischen γ_{pq}. Es bleibt die Diskussion des Gleichheitsfalles: $L[c|_{[a,t_0]}] = L[\gamma_{pq}]$.

Im Gleichheitsfall folgt aus der Abschätzung $\|(d\exp_p)_{v(t)}\, r(t)\, \dot{w}(t)\|^2 = 0$ und $|\dot{r}(t)| = \dot{r}(t)$. Daraus folgt $\dot{w}(t) = 0$, da $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, und $\dot{r}(t) \geq 0$. Somit ist w konstant und r monoton wachsend. Die Kurve c muß in q enden, anderenfalls hätte man $L[c] > L[c|_{[a,t_0]}] = L[\gamma_{pq}] = R$. Also folgt $v(t_0) = v_q$ und $w = w(t_0) = \frac{1}{R}v_q$. Für die Kurve c ergibt sich damit

$$c(t) \;=\; \exp_p(v(t)) \;=\; \exp_p(r(t)\tfrac{1}{R}v_q)\ ,$$

d.h. c ist eine Umparametrisierung der Geodätischen $\gamma_{pq}(t) = \exp_p(tv_q)$. $\square$

Definition 3.25 *Der* Injektivitätsradius $i(p)$ *in einem Punkt* $p \in M$ *ist die größte Zahl* ϵ *für die* $\exp_p\big|\, B_\epsilon(0)$ *ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.*

Sei nun $B_r(p)$ der Abstandsball bzgl. der Metrik d, die definiert ist durch $d(p,q) = \inf L[c]$, wobei das Infinum über alle stückweise glatten, p und q verbindenden, Kurven c genommen wird. Es ist also $B_r(p) = \{q \in M \mid d(p,q) < r\}$.

Folgerung 3.26 *Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jede Zahl $r < i(p)$, die Gleichung $B_r(p) = \exp_p(B_r(0))$.*

Beweis: Sei $v \in T_pM$ mit $\|v\| < r$, d.h. $v \in B_r(0)$. Dann gilt

$$d(p, \exp_p v) \;\leq\; L[\gamma_v] \;=\; \|v\| \;<\; r \;,$$

d.h. $\exp_p(v) \in B_r(p)$, was die Inklusion $\exp_p(B_r(0)) \subset B_r(p)$ zeigt. Genauer gilt nach Satz 3.24 für jeden Punkt $q \in \exp_p(B_r(0))$, dass $d(p,q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|$.

Wir nehmen an, es existiert ein Punkt q mit $d(p,q) < r$, der nicht in $\exp_p(B_r(0))$ liegt. Sei $c : [a,b] \to M$ eine beliebige stückweise glatte Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Dann existiert eine Zeit t_0 mit $c(t_0) = \exp_p(w)$ und $\|w\| = r$, d.h. nach nach Satz 3.24 gilt $d(p, c(t_0)) = r$. Für die Länge der Kurve c ergibt sich $L[c] = L[c|_{[a,t_0]}] + L[c|_{[t_0,b]}]$. Da der Punkt q nicht in $\exp_p(B_r(0))$ liegt, folgt $L[c] > L[c|_{[a,t_0]}] > d(p, c(t_0)) = r$ und, da die Kurve c beliebig war, auch $d(p,q) \geq r$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Somit ist auch die umgekehrte Inklusion $B_r(p) \subset \exp_p(B_r(0))$ bewiesen. $\square$

Bemerkungen:

1. Es wurde insbesondere gezeigt, dass für alle Punkte p, q, nahe genug zueinander, eine eindeutig bestimmte Kürzeste existiert, nämlich die Geodätische γ_{pq}.

2. Die Folgerung zeigt noch mal, dass die Topologie des metrischen Raumes (M,d) mit der gegebenen Topologie auf M übereinstimmt. Denn die Kugeln $B_\epsilon(0)$ bilden einen Umgebungsbasis von $0 \in T_pM$ und, da $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, folgt, dass $\exp_p(B_r(0))$ für $r < \epsilon < i(p)$ eine Umgebungsbasis von p in der gegebenen Topologie bildet. Andererseits bilden die Mengen $B_r(p)$ eine Umgebungsbasis der metrischen Topologie.

Satz 3.27 *Kürzeste sind Geodätische, also insbesondere glatt.*

Beweis: Sei $\lambda \colon [0,L] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kürzeste von $x = \lambda(0)$ nach $y = \lambda(L)$, d.h. die Länge von λ ist gleich $d(x,y)$.

- **Behauptung**: λ ist vor und hinter jedem Punkt $p = \lambda(t)$, mit $t \in (0,L)$ beliebig, Stück einer Geodätischen und damit ist λ stückweise glatt.

  Beweis: Sei $\epsilon < i(p)$, wobei $i(p)$ der Injektivitätsradius ist und $q = \lambda(t') \in B_\epsilon(p)$ mit $t' > t$. Dann ist $\lambda|_{[t,t']} = \gamma_{pq}$ bis auf Umparametrisierung (und analog für $t' < t$).

- **Annahme**: λ hat einen Knick im Punkt p.

  Dann wählt man q, q' vor bzw. nach p mit $d(q,q') < \epsilon$, wobei $\epsilon > 0$ so dass $i(q) \geq \epsilon$ (siehe folgendes Lemma). Dann ist λ auch die Kürzeste zwischen q und q', d.h. $\lambda = \gamma_{qq'}$. Insbesondere hat λ keinen Knick in p.

□

Im Beweis haben wir folgendes Lemma verwendet:

Lemma 3.28 *Um jeden Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U und ein $\epsilon > 0$, so dass $i(q) \geq \epsilon$ für alle $q \in U$.*

Beweis: Zum Beweis finden wir eine offene Umgebung W von $(p, 0)$ im Tangentialbündel TM, auf welcher der geodätische Fluß einen lokalen Diffeomorphismus definiert.

Sei $A \subset M$ eine kleine Umgebung von p. O.B.d.A. können wir durch Karten annehmen, dass $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist und $V \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung der Null ist, so dass $\exp_q$ für alle $q \in A$ auf ganz V definiert ist.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F \colon A \times V &\to A \times M \\ (q, v) &\mapsto (q, \exp_q v). \end{aligned}$$

Das Differential von F ist von der Form

$$dF_{(p,0)} = \left(d_1 F_{(p,0)}, d_2 F_{(p,0)}\right),$$

wobei d_1 die Ableitung in q-Richtung und d_2 die Ableitung in v-Richtung bezeichnet. Sei $p(t)$ eine Kurve in A durch p und $v(t)$ eine Kurve in V durch v. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_1 F_{(p,0)}(\dot{p}(0)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (p(t), p(t)) = (\dot{p}(0), \dot{p}(0)) \\ d_2 F_{(p,0)}(\dot{v}(0)) &= (0, d\exp_p \dot{v}(0)) = (0, \dot{v}(0)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$dF_{(p,0)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix},$$

d.h. $dF_{(p,0)}$ ist invertierbar. Deshalb existiert eine Umgebung W von $(p, 0)$ in $A \times V$, so dass $F|_W$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Die offene Umgebung W enthält eine Umgebung der Form $U \times B_\epsilon(0)$, wobei U eine Umgebung von $p \in M$ ist (Produktopologie). Dann ist $\exp_q|_{B_\epsilon(0)}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild für alle $q \in U$. □

3.7 Kürzeste im Großen

Beispiel: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik offen und nicht konvex. Dann lassen sich nicht alle Punkte von M durch eine Geodätische, d.h. Gerade, verbinden.

Satz 3.29 *Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$, so dass $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert ist. Dann existiert für jeden Punkt $q \in M$ eine Kürzeste γ von p nach q. Insbesondere gilt:*

$$\overline{B}_R(p) = \exp_p\left(\overline{B}_R(0)\right) \quad \textit{für alle } R > 0.$$

Beweis: Sei $p \in M$ so dass $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert ist und $q \in M$ beliebig. Für ein beliebiges $r < i(p)$ setzen wir

$$\overline{B}_r(p) = \{x \in M \mid d(p,x) \le r\}.$$

Die Exponentialabbildung ist ein Diffeomorphismus

$$\exp_p \colon \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(p).$$

Insbesondere ist die Abstandssphäre $\partial\overline{B}_r(p)$ kompakt. Sei $d_q \colon M \to \mathbb{R}$ die Abbildung $d_q(x) = d(q,x)$. Diese Abbildung ist nach der Dreiecksungleichung stetig. Deshalb nimmt die Einschränkung

$$d_q \colon \partial\overline{B}_r(p) \to \mathbb{R}$$

ein Minimum in einem Punkt $x = \exp_p(rv)$ an, mit $v \in T_pM$, $||v|| = 1$.

Sei $\gamma = \gamma_v$ die Geodätische mit Anfangswerten p, v. Wir zeigen, dass $\gamma(R) = q$ für $R = d(p,q)$, d.h. γ ist die gesuchte Kürzeste.

Wir beweisen, dass

$$t + d_q(\gamma(t)) = R \quad \forall t \in [0,R]. \tag{3.5}$$

Die Behauptung folgt dann für $t = R$, denn dann ist $d_q(\gamma(R)) = 0$, d.h. $\gamma(R) = q$. Geometrisch bedeutet (3.5), dass $\gamma|_{[0,t]}$ eine Kürzeste ist, denn (3.5) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} d(p,q) = R &= t + d_q(\gamma(t)) \\ &= d(p,\gamma(t)) + d(\gamma(t),q). \end{aligned}$$

Wir beweisen (3.5) zunächst für $t = r$: Sei c eine beliebige Kurve von p nach q, welche die Abstandssphäre $\partial\overline{B}_r(p)$ in einem Punkt x' schneidet. Sei c_1 das Stück von p nach x' und c_2 das Stück von x' nach q. Dann gilt

$$L[c_1] \ge r, \quad L[c_2] \ge d_q(x') \ge d_q(x),$$

da x das Minimum von d_q auf der Sphäre ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} L[c] &= L[c_1] + L[c_2] \\ &\ge r + d_q(x) \\ &= r + d_q(\gamma(r)). \end{aligned}$$

Da c beliebig ist, folgt $R = d(p,q) \ge r + d_q(\gamma(r))$. Andererseits ist nach der Dreiecksungleichung

$$R = d(p,q) \le d_p(x) + d_q(\gamma(r)) = r + d_q(\gamma(r)).$$

Das beweist Gleichung (3.5) für $t = r$.

Wir beweisen nun Gleichung (3.5) für beliebiges t. Sei

$$s = \sup\{t \in [0,R] \mid \text{Gleichung (3.5) gilt}\}.$$

Dann ist nach dem gerade eben gezeigten $s \geq r$. Außerdem gilt wegen Stetigkeit Gleichung (3.5) auch für $t = s$. Zu zeigen ist, dass $s = R$.

Annahme: $s < R$. Wir führen das zu einem Widerspruch indem wir zeigen, dass Gleichung (3.5) auch für $s + r_1$ mit einem $r_1 > 0$ gilt. Sei $p_1 = \gamma(s)$, $r_1 < i(p_1)$ und x_1 der Punkt auf der Abstandssphäre $\partial \overline{B}_{r_1}(p_1)$ mit minimalen Abstand zu q. Mit γ_1 bezeichnen wir den Teil von γ von p nach p_1, d.h. $\gamma_1 = \gamma|_{[0,s]}$. Wir zeigen zunächst, dass $d(p, x_1) = s + r_1$: Da Gleichung (3.5) für s gilt, folgt

$$d(p, q) = d(p, p_1) + d(p_1, q).$$

Da Gleichung (3.5) auch für den Startpunkt p_1 mit $t = r_1$ gilt, folgt

$$d(p_1, q) = d(p_1, x_1) + d(x_1, q).$$

Außerdem gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(p, q) \leq d(p, x_1) + d(x_1, q).$$

Daraus folgt

$$d(p, x_1) \geq d(p, p_1) + d(p_1, x_1) = s + r_1.$$

Da die andere Ungleichung wegen der Dreiecksungleichung gilt, folgt die behauptete Gleichung. Außerdem gilt

$$d(p, q) = d(p, x_1) + d(x_1, q). \tag{3.6}$$

Die Länge von $\gamma_1 \cup \gamma_{p_1 x_1}$ ist aber gerade $s + r_1$. Es folgt, dass $\gamma_1 \cup \gamma_{p_1 x_1}$ eine Kürzeste und damit nach Satz 3.27 glatt ist. Daher ist $\gamma_1 \cup \gamma_{p_1 x_1}$ eine geodätische Fortsetzung von γ_1 und damit

$$x_1 = \gamma(s + r_1).$$

Mit Gleichung (3.6) folgt

$$R = d(p, q) = d(p, \gamma(s + r_1)) + d(\gamma(s + r_1), q).$$

Damit gilt Gleichung (3.5) auch für $s + r_1$.

Insgesamt folgt, dass Gleichung (3.5) für $t = R$ gilt und damit die Behauptung des Satzes.

Wir beweisen zum Abschluß den Zusatz

$$\overline{B}_R(p) = \exp_p\left(\overline{B}_R(0)\right) \quad \text{für alle } R > 0.$$

Sei $q \in \exp_p\left(\overline{B}_R(0)\right)$, d.h. $q = \exp_p(tv)$ für ein $t \leq R$, $||v|| = 1$. Da diese Geodätische Länge t hat, folgt dass $d(p, q) \leq t \leq R$. Also ist $q \in \overline{B}_R(p)$. Sei umgekehrt $q \in \overline{B}_R(p)$. Dann ist $d(p, q) = t \leq R$. Nach dem Beweis des Satzes gilt $q = \exp_p(tv)$ für ein $v \in T_pM$ mit $||v|| = 1$. Das zeigt die umgekehrte Inklusion. $\square$

Satz 3.30 (Hopf-Rinow 1931) *Für zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\exp_p$ *ist auf ganz* T_pM *definiert für einen Punkt* $p \in M$.

2. (M, d) *ist metrisch vollständig, d.h. Cauchy-Folgen konvergieren.*

3. (M, g) *ist geodätisch vollständig, d.h. jede Geodätische ist auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert.*

Beweis: **1.** $\Rightarrow$ **2.** Sei (q_i) eine Cauchy-Folge in M, d.h.

$$d(q_i, q_j) < \epsilon, \quad \forall i, j \geq i_\epsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} d(p, q_j) &\leq d(p, q_{i_\epsilon}) + d(q_{i_\epsilon}, q_j) \\ &< d(p, q_{i_\epsilon}) + \epsilon \quad \forall j \geq i_\epsilon \\ &= R \end{aligned}$$

für eine gewisse Zahl R. Daraus folgt, dass $(q_j)_{j \geq i_\epsilon}$ in der Menge $\overline{B}_R(p)$ liegt, die wegen $\overline{B}_R(p) = \exp_p(\overline{B}_R(0))$ nach Satz 3.29 kompakt ist. Da sie auch folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge und die Folge (q_j) konvergiert.

2. $\Rightarrow$ **3.** Sei γ eine Geodätische, parametrisiert nach Bogenlänge, die nur auf einem endlichen Intervall $[0, s)$ definiert ist, $s < \infty$. Wir führen das zu einem Widerspruch. Sei (t_i) eine Folge in $[0, s)$, die gegen s konvergiert. Dann ist $(\gamma(t_i))$ eine Cauchy-Folge, da

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) = |t_i - t_j| < \epsilon \quad \forall i, j \geq i_\epsilon.$$

Nach Voraussetzung konvergiert $\gamma(t_i)$ gegen einen Punkt q. Wir betrachten die Vektoren

$$v_i = \dot{\gamma}(t_i) \in T_{\gamma_i}M, ||v_i|| = 1$$

als Folge im Einheitssphärenbündel des Tangentialbündels TM. Es folgt, dass die (v_i) (genauer: eine Teilfolge) gegen einen Vektor $v \in T_qM$ mit $||v|| = 1$ konvergieren. Mit einem ähnlichen Argument wie in Lemma 3.28 können wir annehmen, dass alle Geodätische γ_{v_i} und γ_v auf demselben Intervall $(-\delta, \delta)$ definiert sind. Es folgt, dass $\gamma_{v_i}(t)$ gegen $\gamma_v(t)$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$ konvergiert. Nach Definition gilt

$$\gamma_{v_i}(t) = \gamma(t_i + t).$$

Es folgt

$$\gamma_v(t) = \lim_{i \to \infty} \gamma(t_i + t) = \gamma(s + t) \quad \forall t \in (-\delta, 0].$$

Also ist γ_v eine geodätische Fortsetzung von γ auf das Intervall $[0, s + \delta)$. Damit ist γ auf einem größeren Intervall definiert, im Widerspruch zur Annahme. Also ist γ auf ganz $[0, \infty)$ definiert. Analog folgt, dass γ auf $(-\infty, \infty)$ definiert ist.

3. $\Rightarrow$ **1.** Diese Implikation ist trivial. $\square$

3.8 Krümmung und Jacobi-Vektorfelder

Sei $\gamma\colon I \to M$ eine Geodätische.

Definition 3.31 *Eine* geodätische Variation *ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}\colon A \times I &\longrightarrow M \\ (s,t) &\longmapsto \hat{\gamma}(s,t) = \gamma_s(t), \end{aligned}$$

wobei A ein Intervall ist, so dass gilt:

- *$\hat{\gamma}$ ist glatt*
- $\gamma_0 = \gamma$
- *γ_s sind Geodätische für alle $s \in A$.*

Das *Variationsfeld* einer geodätischen Variation ist

$$J = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \gamma_s.$$

Das Variationsfeld ist ein Vektorfeld entlang γ. Wir schreiben

$$J = J(t),\ \dot{J} = \frac{\nabla}{dt} J,\ \ddot{J} = \frac{\nabla}{dt} \dot{J}.$$

Satz 3.32 *Für das Variationsfeld einer geodätischen Variation gilt die Differential-Gleichung:*

$$\ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0\ , \tag{3.7}$$

wobei R den Riemannschen Krümmungstensor bezeichnet. Die Gleichung (3.7) wird als Jacobi-Differentialgleichung *bezeichnet.*

Definition 3.33 *Allgemein nennt man Lösungen dieser Differentialgleichung* Jacobi-Vektorfelder *entlang γ.*

Beweis: Mit Lemma 3.18 und weil γ eine Geodätische ist, gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{J} &= \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt} J = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \hat{\gamma} \\ &= \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\gamma} \\ &= \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} + R\left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}\right)\dot{\gamma} \\ &= -R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Der Schritt zu der dritten Zeile folgt, da in lokalen Koordinaten

$$\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\dot{\gamma} = \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\dot{\gamma} + R(\partial_i, \partial_j)\dot{\gamma},$$

wegen der Definition des Krümmungstensors und da $[\partial_i, \partial_j] = 0$. □

Bemerkung:

- Jacobi-Vektorfelder J sind eindeutig bestimmt durch den Anfangswert $J(0)$ und die Anfangsableitung $\dot{J}(0)$. Die Menge der Jacobi-Vektorfelder entlang γ ist ein $2n$-dimensionaler Vektorraum, wobei n die Dimension von M ist (Theorie linearere Differentialgleichungen).

- Triviale Lösungen der Jacobi-Gleichung erhält man durch Umparametrisieren einer Geodätischen γ:

  $$\hat{\gamma}(s,t) = \gamma(t + s(at+b)), \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ Konstanten.}$$

  Dann gilt $J(t) = (at+b)\dot{\gamma}(t)$, $\dot{J}(t) = a\dot{\gamma}$ und $\ddot{J}(t) = 0$. Damit ist J eine Lösung der Jacobi-Gleichung (das ist klar, da $\hat{\gamma}$ eine Variation durch Geodätische ist).

- Sei J ein Jacobi-Vektorfeld entlang γ. Dann ist $g(J, \dot{\gamma})$ eine lineare Funktion in t:

  $$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} g(J, \dot{\gamma}) &= \frac{d}{dt} g(\dot{J}, \dot{\gamma}) \\ &= g(\ddot{J}, \dot{\gamma}) \\ &= -g(R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -R(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Jacobi-Vektorfelder entsprechen genau den geodätischen Variationen. Um das zu zeigen, müssen wir ausgehend von einem Jacobi-Vektorfeld eine geodätische Variation konstruieren. Sei J ein Jacobi-Vektorfeld entlang der Geodätischen $\gamma = \gamma(t)$ durch $\gamma(0) = p$. Sei $c = c(s)$ eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = J(0)$. Seien X, Y die parallelen Vektorfelder entlang c mit $X(0) = \dot{\gamma}(0)$ und $Y(0) = \dot{J}(0)$.

Behauptung: Die Abbildung

$$\hat{\gamma}(s,t) = \exp_{c(s)}(t(X(s) + sY(s)))$$

ist eine geodätische Variation mit Jacobi-Vektorfeld J.

Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(0,t) &= \exp_p(t\dot{\gamma}(0)) = \gamma(t) \\ \hat{\gamma}(s,0) &= \exp_{c(s)}(0) = c(s). \end{aligned}$$

Da $\hat{\gamma}$ eine Variation durch Geodätische ist, ist

$$Z(t) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \hat{\gamma}(s,t)$$

ein Jacobi-Vektorfeld. Wir müssen zeigen, dass es dieselben Anfangswerte wie J hat. Es gilt:

$$\begin{aligned}
Z(0) &= \dot{c}(0) = J(0) \\
\dot{Z}(0) &= \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial s}\hat{\gamma}(s,t) \\
&= \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\gamma}(s,t) \\
&= \frac{\nabla}{ds}\bigg|_{s=0}(X(s) + sY(s)) \\
&= Y(0) = \dot{J}(0),
\end{aligned}$$

da X und Y parallel entlang c sind.

Lemma 3.34 *Der Jacobi-Operator $R_v = R(\cdot, v)v \colon T_pM \to T_pM$ ist symmetrisch für jedes $v \in T_pM$ und damit diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten.*

Beweis: Es gilt wegen den Symmetrien des Krümmungstensors:

$$\begin{aligned}
g(R_vX, Y) &= R(X, v, v, Y) \\
&= R(v, X, Y, v) = R(Y, v, v, X) \\
&= g(R_vY, X) = g(X, R_vY).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Sei $M = S^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \mathbb{H}\mathrm{P}^n$ oder CaP^2, d.h. M ist ein Rang 1 symmetrischer Raum. Dann operiert die Isometriegruppe transitiv auf dem Einheitssphärenbündel im Tangentialbündel. Daraus folgt, dass die Eigenwerte von R_v weder vom Fußpunkt p noch dem Vektor v abhängen. Die *Ossermann-Vermutung* besagt, dass auch die Umkehrung gilt. Sie ist zumindest für $\dim M \neq 8, 16$ gelöst durch Arbeiten von Gilkey.

Bemerkung: Sei γ eine Geodätische mit $v = \dot{\gamma}$, $||v|| = 1$. Dann gilt für ein Jacobi-Vektorfeld die Gleichung $\ddot{J} = -R_v(J)$. Für alle Tangentialvektoren x, die senkrecht auf v stehen, ist die Schnittkrümmung $K(x, v)$ gegeben durch

$$K(x, v) = \frac{g(R(x, v)v, x)}{||x||^2||v||^2 - g(x, v)^2} = \frac{g(R_vx, x)}{||x||^2}.$$

Falls

- $K > 0$, dann ist $-R_v < 0$, d.h. Geodätische streben wieder zusammen, wie auf S^n.
- $K < 0$, dann ist $-R_v > 0$, d.h. Geodätische streben schneller auseinander, als auf dem $\mathbb{R}^n$, z.B. wie auf dem hyperbolischen Raum $\mathbb{H}^n$.

Definition 3.35 *Sei J_{vw} das Jacobi-Vektorfeld entlang der Geodätischen γ_v, bestimmt durch $J_{vw}(0) = 0$ und $\dot{J}_{vw} = w$, wobei $\gamma_v(0) = p$ und $v, w \in T_pM$.*

Lemma 3.36 *Für $v \in T_pM$ klein genug, so dass $\exp_p$ im Punkt v definiert ist, gilt*

$$(d\exp_p)_v w = J_{vw}(1). \tag{3.8}$$

Dabei ist $(d\exp_p)_v \colon T_vT_pM \cong T_pM \to T_{\exp_p(v)}M$.

Bemerkung: Im Beweis von Satz 3.12 haben wir gezeigt, dass

$$(d\exp_p)_0 = \mathrm{Id}_{T_pM}.$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
(d\exp_p)_v w &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp_p(v+sw)\\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \gamma_{v+sw}(1)\\
&= J(1),
\end{aligned}$$

wobei J das durch die geodätische Variation $(s,t) \mapsto \gamma_{v+sw}(t)$ definierte Jacobi-Vektorfeld ist.

Zu zeigen: $J = J_{vw}$. Dazu berechnen wir die Anfangswerte von J:

$$\begin{aligned}
J(0) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \gamma_{v+sw}(0) = 0, \text{ da } \gamma_{v+sw}(0) \equiv p.\\
\dot{J}(0) &= \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \gamma_{v+sw}(t)\\
&= \left.\frac{\nabla}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \gamma_{v+sw}(t)\\
&= \left.\frac{\nabla}{ds}\right|_{s=0} \dot{\gamma}_{v+sw}(0)\\
&= \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} (v+sw)\\
&= w.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass für ein Vektorfeld entlang einer konstanten Kurve die kovariante Ableitung gleich der gewöhnlichen Ableitung im Tangentialraum ist. Insgesamt folgt, dass $J = J_{vw}$. □

Bemerkung: Für alle t hinreichend klein, so dass $\exp_p$ im Punkt tv definiert ist, gilt

$$J_{vw}(t) = (d\exp_p)_{tv} tw.$$

Beweis: Es ist:

$$\begin{aligned}(d\exp_p)_{tv} tw &= J_{tv\,tw}(1)\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \gamma_{t(v+sw)}(1)\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \gamma_{v+sw}(t)\\ &= J_{vw}(t).\end{aligned}$$

□

Wir beweisen eine interessante Anwendung der Jacobi-Vektorfelder:

Satz 3.37 *Seien (M^n, g) und $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit derselben konstanten Schnittkrümmung K. Dann sind (M, g) und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ lokal isometrisch.*

Beweis: Sei $W(t)$ das parallele Vektorfeld entlang der Geodätischen γ_v mit $W(0) = w$ und sei $s_K \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\ddot{s}_K + K s_K = 0, \quad s_K(0) = 0, \dot{s}_K(0) = 1.$$

Es gilt:

$$s_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}\, t & \text{für } K > 0\\ t & \text{für } K = 0\\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh \sqrt{-K}\, t & \text{für } K < 0.\end{cases}$$

Außerdem ist $J_{vw}(t) = s_K(t) W(t)$, da

$$\begin{aligned}&J_{vw}(0) = 0\\ &\dot{J}_{vw}(0) = \dot{s}_K(0) W(0) = w \text{ (W ist parallel)},\end{aligned}$$

und J_{vw} löst die Jacobi-Gleichung bei konstanter Schnittkrümmung K. Mit der Bemerkung nach dem Beweis von Lemma 3.36 folgt, dass

$$||(d\exp_p)_{tv} tw||_g = |s_K(t)| \cdot ||W(t)||_g = |s_K(t)| \cdot ||w||_g.$$

Wir konstruieren nun die lokale Isometrie zwischen M und $\tilde{M}$. Sei

$$A \colon T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$$

eine beliebige lineare Isometrie für ein Paar von Punkten p und $\tilde{p}$, definiert z.B. indem man die Vektoren von Orthonormalbasen in den Tangentialräumen paarweise identifiziert. Sei f die Abbildung

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ A \circ \exp_p^{-1}.$$

Behauptung: f ist eine Isometrie zwischen Normalenumgebungen von p in M und $\tilde{p}$ in $\tilde{M}$.

Zum Beweis berechnen wir das Differential df im Punkt $\exp_p(tv)$, wobei t hinreichend klein ist. Ein beliebiger Tangentialvektor x in diesem Punkt schreibt sich als $x = (d\exp_p)_{tv} tw$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
||df_{\exp_p(tv)} x||_{\tilde{g}} &= ||df_{\exp_p(tv)} (d\exp_p)_{tv} tw||_{\tilde{g}} \\
&= ||(d\exp_{\tilde{p}})_{tAv} tAw||_{\tilde{g}} \\
&= |s_K(t)| \cdot ||Aw||_{\tilde{g}} \\
&= |s_K(t)| \cdot ||w||_g \\
&= ||(d\exp_p)_{tv} tw||_g \\
&= ||x||_g.
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Definition von f verwendet. Insgesamt folgt die Behauptung. $\square$

3.9 Der Satz von Cartan-Hadamard

Satz 3.38 (Cartan-Hadamard) *Sei (M^n, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung nicht-positiv ist, $K \leq 0$. Dann existiert eine vollständige Riemannsche Metrik auf $T_pM \cong \mathbb{R}^n$, für die $\exp_p\colon T_pM \to M$ eine lokale Isometrie ist, d.h. $\exp_p$ ist eine lokal isometrische Überlagerungsabbildung. Insbesondere ist für $\pi_1(M) = 1$ die Mannigfaltigkeit M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Zu zeigen ist zunächst, dass $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h. dass

$$(d\exp_p)_v w = J_{vw}(1) \neq 0 \quad \forall w \in T_pM.$$

Sei $J = J_{vw}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \ddot{J}, J \rangle &= -\langle R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J \rangle \\
&= -K(J, \dot{\gamma}) ||J \wedge \dot{\gamma}||^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} ||J(t)||^2 &= 2\frac{d}{dt} \langle \dot{J}, J \rangle \\
&= 2\langle \ddot{J}, J \rangle + 2||\dot{J}||^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Sei $f(t) = ||J(t)||^2$. Dann gilt $f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0$ und $\ddot{f}(t) \geq 0$, d.h. die Funktion f ist konvex. Da $w \neq 0$, ist f nicht identisch Null. Damit folgt

$$||J_{vw}(t)|| > 0 \quad \forall t > 0.$$

Das war zu zeigen.

Wir definieren eine Metrik auf T_pM durch

$$\hat{g} = \exp_p^* g.$$

Dann ist $\exp_p$ eine lokale Isometrie. Es bleibt zu zeigen, dass $(T_pM, \hat{g})$ vollständig ist. Sei $v \in T_pM$ ein beliebiger Vektor. Unter der Exponentialabbildung wird die Kurve $t \mapsto tv$ auf die Geodätische $\gamma_v(t)$ abgebildet, die für alle Zeiten t definiert ist, da (M, g) vollständig ist. Da die Exponentialabbildung eine lokale Isometrie ist, folgt dass $t \mapsto tv$ eine für alle Zeiten definierte Geodätische bezüglich $\hat{g}$ ist. Damit ist $(T_pM, \hat{g})$ vollständig. □

3.10 Raumformen

Eine Raumform ist eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung.

Satz 3.39 *Sei (M^n, g) eine Raumform. Dann ist die universelle Überlagerung von M isometrisch zu $S^n, \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{H}^n$.*

Bemerkung: Die Bestimmung aller Raumformen ist äquivalent zur Bestimmung aller frei und eigentlich diskontinuierlich operierenden Untergruppen von $\mathrm{Iso}(S^n)$, $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n)$.
Einige bekannte Ergebnisse sind:

- Hantzsche-Wendt (1935): Für $n = 3, K = 0$ gibt es bis auf Homöomorphie 10 kompakte und 8 nicht kompakte Raumformen.
- Hopf (1926): Für $n \equiv 0 \mod 2, K > 0$ sind S^n und $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die einzigen Raumformen.
- Wolf (1967): vollständige Klassifikation für $n \geq 4, K > 0$.

3.11 Die zweite Variationsformel

Sei $\hat{\gamma}\colon A \times [a, b] \to M$ eine Variation mit festen Anfangs- und Endpunkten, d.h.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(s, a) &= \gamma_0(a) \\ \hat{\gamma}(s, b) &= \gamma_0(b) \quad \forall s \in A. \end{aligned}$$

Die Kurve $\gamma = \gamma_0$ sei eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Das Längenfunktional ist definiert durch

$$L[s] = L[\gamma_s] = \int_a^b ||\dot{\gamma}_s(t)||dt.$$

Das Variationsvektorfeld ist

$$Y = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \hat{\gamma},$$

mit

$$Y(a) = Y(b) = 0, \tag{3.9}$$

da die Variation feste Anfangs- und Endpunkte hat. Sei

$$Y^\perp = Y - g(\dot\gamma, Y)\dot\gamma$$

die Projektion von Y auf $\dot\gamma^\perp$. Mit $\dot Y$ und $\ddot Y$ bezeichnen wir die kovarianten Ableitungen von Y entlang γ.

Satz 3.40 *Es gelten die beiden folgenden Variationsformeln:*

1. $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(s) = 0$ *(siehe Folgerung 3.21 zur ersten Variationsformel).*
2. $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(s) = -\int_a^b g(\ddot Y^\perp + R(Y^\perp, \dot\gamma)\dot\gamma, Y^\perp)dt$ *(zweite Variationsformel).*

Bemerkung:

- Es gilt:
$$||\dot Y^\perp||^2 = \frac{d}{dt} g(\dot Y^\perp, Y^\perp) - g(\ddot Y^\perp, Y^\perp).$$
Mit Eigenschaft (3.9) folgt
$$\int_a^b g(\ddot Y^\perp, Y^\perp)dt = -\int_a^b ||\dot Y^\perp||^2 dt.$$
- $g(R(Y^\perp, \dot\gamma)\dot\gamma, Y^\perp) = K(Y^\perp, \dot\gamma)||Y^\perp||^2.$

Bemerkung: Ist $\gamma\colon [a,b] \to M$ eine Geodätische, die den minimalen Abstand zwischen den Endpunkten realisiert, d.h. mit $d(\gamma(a), \gamma(b)) = L[\gamma]$, dann gilt $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L[s] \geq 0$, für jede Variation mit festen Anfangs- und Endpunkten.

3.12 Der Satz von Bonnet-Meyers

Satz 3.41 (Bonnet-Meyers) *Sei (M^n, g) eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es existiere ein $\delta > 0$ mit $K \geq \delta > 0$. Dann gilt:*

- *M ist kompakt.*
- *$diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = diam\left(S^n_{1/\sqrt{\delta}}\right)$.*

Dabei ist der Durchmesser von M definiert als

$$\operatorname{diam}(M) = \sup\{d(p,q) \mid p, q \in M\}.$$

Beweis: Seien p, q Punkte in M und $\gamma\colon [0,l] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kürzeste von p nach q. Sei E ein paralleles Vektorfeld entlang γ mit $||E|| = 1$, das senkrecht auf $\dot\gamma$ steht. Wir definieren ein Vektorfeld

$$Y(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{l}\right) E(t)$$

und eine Variation $\hat{\gamma}$ der Geodätischen γ, gegeben durch

$$\hat{\gamma}(s,t) = \exp_{\gamma(t)}(sY(t)).$$

Da γ minimal ist, folgt dass $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L[s] = 0$. Damit gilt mit der zweiten Variationsformel:

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^l g(\ddot{Y}^\perp + R(Y^\perp, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y^\perp)dt \\ &= -\int_0^l \left(-\frac{\pi^2}{l^2} g(E,E) + g(R(E,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, E)\right) \sin^2\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt. \end{aligned}$$

Damit ist

$$0 = \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2} - K(E,\dot{\gamma})\right) \sin^2\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt. \tag{3.10}$$

Mit der Annahme folgt

$$0 \leq \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \delta\right) \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt$$

und damit

$$0 \leq \frac{\pi^2}{l^2} - \delta.$$

Daraus folgt der zweite Teil der Behauptung. Der erste Teil der Behauptung folgt, da M abgeschlossen und beschränkt ist und damit nach (einer Erweiterung von) Satz 3.30 von Hopf-Rinow kompakt. □

In ähnlicher Weise beweist man:

Satz 3.42 *Sei (M^n, g) eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \geq 2$ und es existiere ein $\delta > 0$ mit*

$$Ric(X,X) \geq (n-1)\delta ||X||^2,$$

d.h. alle Eigenwerte der Ricci-Krümmung sind $\geq (n-1)\delta$. Dann ist M kompakt und $diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Beweis: Es gilt

$$Ric(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \sum_{i=1}^{n-1} K(E_i, \dot{\gamma}),$$

wobei E_i eine Orthonormalbasis von $\dot{\gamma}^\perp$ ist. Mit der entsprechenden Summe über Gleichung (3.10) folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.43 *Falls für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) die Ungleichung $K \geq \delta > 0$ oder $Ric \geq (n-1)\delta > 0$ gilt, dann ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ endlich.*

Beweis: Sei $\pi\colon \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung und $\tilde{g} = \pi^* g$ die zurückgezogene Metrik. Dann ist im ersten Fall $K_{\tilde{M}} \geq \delta > 0$. Da $\tilde{M}$ vollständig ist, ist nach Satz 3.41 von Bonnet-Meyers die Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ kompakt. Dann kann die Überlagerung nur endlich viele Blätter haben, d.h. $\pi_1(M)$ ist endlich. $\square$

Bemerkung: Die Voraussetzung $K > 0$ oder $Ric > 0$ ist **nicht** ausreichend. Ein Gegenbeispiel ist das 2-dimensionale Rotationsparaboloid, das $K > 0$ hat, aber nicht kompakt ist.

Anwendung: Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $M = S^2 \times S^1$. Das Produkt der Standardmetriken hat $K \geq 0$. Aber:

- Es existiert keine Metrik auf M mit $K \leq 0$: Die universelle Überlagerung ist $\tilde{M} = S^2 \times \mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^3$. Die Behauptung folgt mit Satz 3.38 von Cartan-Hadamard.
- Es existiert keine Metrik auf M mit $K > 0$: Da M kompakt ist, würde folgen, dass $K \geq \delta > 0$ für ein δ. Nach Satz 3.41 von Bonnet-Meyers wäre $\pi_1(M)$ endlich, was ein Widerspruch ist, denn $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$.

Satz 3.44 (Synge) *Sei (M^n, g) eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K > 0$. Dann gilt:*

- *Ist $n \equiv 0 \mod 2$ und M orientierbar, dann ist $\pi_1(M) = 1$.*
- *Ist $n \equiv 1 \mod 2$, dann ist M orientierbar.*

Anwendung: Die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ besitzt keine Metrik mit positiver Schnittkrümmung. Der Grund ist, dass dann auch die Orientierungsüberlagerung positive Schnittkrümmung hätte und damit nach dem Satz 3.44 von Synge einfach-zusammenhängend wäre. D.h. die Orientierungsüberlagerung, die eine Überlagerung der Ordnung zwei ist, wäre die universelle Überlagerung. Damit wäre $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$. Das ist ein Widerspruch zu $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

4 Der Laplace Operator auf Funktionen

4.1 Eigenräume und Spektren

Lemma 4.1 *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $V_i \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ für $i = 0, 1, \dots$ eine Folge von Unterräumen mit den beiden Bedingungen*

1. *Zu jedem i existiert eine reelle Zahl λ_i mit $\Delta f = \lambda_i f$ für alle $f \in V_i$*
2. *Die Summe $\oplus_i V_i$ liegt dicht in $\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Dann besteht das Spektrum von Δ_g genau aus den Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ und die Räume V_i sind genau die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_i.

Beweis:

$\square$

Folgerung 4.2

Beweis:

□

4.2 Das Laplace-Spektrum auf der Sphäre

Sei $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ der Euklidische Raum mit der Standard-Metrik. Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei versehen mit der induzierten Metrik. Jeder glatte Funktion f auf $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch Einschränkung eine glatte Funktion auf S^n. Die Wirkung des Laplace-Operators auf diesen eingeschränkten Funktionen läßt sich nun leicht berechnen.

Satz 4.3

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f) \,|_{S^n} \;=\; \Delta^{S^n}(f\,|_{S^n}) \;-\; \tfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\,|_{S^n} \;-\; n\,\tfrac{\partial f}{\partial r}\,|_{S^n}$$

Beweis:

□

Mit Hilfe dieser Formel sollen nun explizit Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Sphäre konstruiert werden. Spä
ter wird gezeigt, dass man schon alle möglichen Eigenfunktionen gefunden hat.
Sei H ein homogenes Polynom vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Ein solches Polynom schreibt sich in den Koordinaten $x_0, \ldots, x_n$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ als:

$$H(x) \;=\; H(x_0, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1,\ldots,i_p}\, x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot \ldots \cdot x_{i_p}^{n_{i_p}}$$

mit $\sum_{j=1}^{p} n_{i_j} = k$. Homogene Polynome vom Grad 0 sind die konstanten Funktionen, die vom Grad 1 sind die linearen Funktionen $H(x) = \sum a_i x_i$. Die homogenen Polynome vom Grad k bilden einen Vektorraum, der mit $\mathcal{P}_k$ wird. Für die Dimension des Raumes der homogenen Polynome vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\dim \mathcal{P}_k \;=\; \binom{n+k}{k}\,.$$

Für homogene Polynome vom Grad k gilt $H(\mu x) = \mu^k H(x)$. Insbesondere gilt daher $H = r^k H\,|_{S^n}$ wobei r die radiale Koordinate bezeichnet, also $r(x) = \|x\|$. Ableiten nach r liefert dann

$$\frac{\partial H}{\partial r} \;=\; k\, r^{k-1} H\,|_{S^n} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \;=\; k\,(k-1)\, r^{k-2} H\,|_{S^n}$$

Die Anwendung der Formel aus Satz 4.3 zeigt, dass die Einschränkungen homogener, harmonischer Polynome (dh. solcher mit $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} H = 0$) Eigenfunktionen von Δ^{S^n} sind. Sei H ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$, dann gilt:

$$\Delta^{S^n}(H\,|_{S^n}) \;=\; k\,(n+k-1)\, H\,|_{S^n}\;\;.$$

Die homogenen, harmonischen Polynome auf $\mathbb{R}^{n+1}$ bilden einen endlich-dimensionalen Vektorraum, der mit $\mathcal{H}_k$ bezeichnet wird. Die Einschränkung auf S^n wird mit $\tilde{\mathcal{H}}_k$ bezeichnet, dh.

$$\tilde{\mathcal{H}}_k \;=\; \{\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(S^n) \,|\, \tilde{f} = f\,|_{S^n}\,,\; f \in \mathcal{H}_k\}$$

Satz 4.4 *Die Räume $\tilde{\mathcal{H}}_k$ sind die Eigenräume des Laplace Operators auf Funktionen zu den Eigenwerten $\lambda_k = k(n+k-1)$, d.h.*

$$\mathrm{spec}(S^n, g_0) \;=\; \{k(n+k-1)\,|\,k = 0, 1, \ldots\}$$

Bemerkungen:

1. In diesem Satz ist die Skalarkrümmung der Sphäre auf $\mathrm{scal} = n(n-1)$ normiert. Die Metrik ist die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Metrik. Das entspricht der Schnittkrümmung $K = 1$ und der Ricci-Krümmung $\mathrm{Ric} = (n-1)g$.

2. Sei $\tilde{g}$ die skalierte Metrik $\tilde{g} = c\,g$, $c \in \mathbb{R}$. Sind λ_i die Eigenwerte des Laplace-Operators Δ_g, dann sind $\frac{1}{c}\,\lambda_i$ die Eigenwerte von $\Delta_{\tilde{g}}$. Insbesondere ist auf der Sphäre also der erste von Null verschiedene Eigenwert gleich $\lambda_1 = \frac{\mathrm{scal}}{n-1}$.

Lemma 4.5 *Der Raum $\mathcal{P}_k$ der homogenen Polynome vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$ hat folgende orthogonale Zerlegung*

$$\mathcal{P}_{2k} \;=\; \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\,\mathcal{H}_{2k-2} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\,\mathcal{H}_0, \quad \mathcal{P}_{2k+1} \;=\; \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\,\mathcal{H}_{2k-1} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\,\mathcal{H}_1$$

Beweis: Man beweist das Lemma mit vollständiger Induktion. Der Induktions-Anfang ist $\mathcal{P}_0 = \mathcal{H}_0$ und $\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_1$, was richtig ist, da homogene Polynome vom Grad 0 bzw 1, also konstante bzw lineare Funktionen, harmonisch sind. Die Induktions-Voraussetzung ist dann die Gleichung $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2\mathcal{P}_{k-2}$. Zu zeigen ist nun die Gleichung $\mathcal{P}_{k+2} = \mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2\mathcal{P}_k$.

□

Beweis von Satz 4.4: Da schon gezeigt wurde, dass die Räume $\tilde{\mathcal{H}}_k$ Eigenräume des Laplace-Operators sind, bleibt nach Lemma 4.1 nur noch zu zeigen, dass die Summe $\oplus\tilde{\mathcal{H}}_k$ dicht in $\mathcal{C}^\infty(S^n)$ liegt. Aus dem Satz von Stone-Weierstrass folgt zunächst, dass $\oplus\tilde{\mathcal{P}}_k$ dicht in $\mathcal{C}^\infty(S^n)$ liegt. Aus Lemma 4.5 folgt dann die gleiche Aussage für die harmonischen homogenen Polynome. □

Bemerkung: Die Multiplizität der Eigenwerte λ_k, also die Dimension der Eigenräume $\tilde{\mathcal{H}}_k$ berechnet sich nach Lemma 4.5 als

$$\dim\tilde{\mathcal{H}}_k \;=\; \tilde{\mathcal{P}}_k \;-\; \tilde{\mathcal{P}}_{k-2} \;=\; \binom{n+k}{k} \;-\; \binom{n+k-2}{k-2}\,.$$

4.3 Flache Tori

Ein *Torus* ist definiert als $T_\Gamma = \mathbb{R}^n/\Gamma$, wobei Γ ein Gitter in $\mathbb{R}^n$ vom Rang n ist. Als abelsche Gruppe ist Γ isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ und T diffeomorph zu $S^1 \times \ldots \times S^1$. Das Gitter Γ kann geschrieben werden als

$$\Gamma = \{a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \mid a_i \in \mathbb{Z}\},$$

wobei die Vektoren v_i linear unabhängig sind. Die Gruppe Γ operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto x + \gamma$, mit $\gamma \in \Gamma$. Da Translationen Isometrien sind, induziert die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ eine Metrik g_Γ auf T_Γ, so dass $\mathbb{R}^n \to T_\Gamma$ eine Riemannsche Überlagerung ist. Der Torus T_Γ mit dieser Metrik heißt *flacher Torus*.

Satz 4.6 *Zwei flache Tori derselben Dimension n sind genau dann isometrisch, falls eine Isometrie von $\mathbb{R}^n$ existiert, welche die Gitter vertauscht.*

Beweis: Sei F eine Isometrie von $\mathbb{R}^n$, welche die Gitter ineinander überführt. Durch Komposition mit einer Translation kann man annehmen, dass die Null auf die Null abgebildet wird. Dann induziert F einen Gruppenisomorphismus von Γ mit Γ' und eine Isometrie von T_Γ mit $T_{\Gamma'}$. Sei umgekehrt $f\colon T_\Gamma \to T_{\Gamma'}$ eine Isometrie. Wir können o.B.d.A. (durch Komposition mit einer Translation auf dem Torus) annehmen, dass $[0] \in T_\Gamma$ in $[0] \in T_{\Gamma'}$ abgebildet wird. Die Isometrie der Tori induziert nach einem Satz aus der Überlagerungstheorie eine Isometrie $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Diese Abbildung bildet das Gitter Γ in Γ' ab. Da sie eine Isometrie ist, muß sie die Gitter Γ und Γ' identifizieren. □

Bemerkung: Da jede Isometrie eines flachen Torus eine Isometrie von $\mathbb{R}^n$ induziert, kommt jede Isometrie des flachen Torus von einer linear-affinen isometrischen Abbildung des $\mathbb{R}^n$. Man kann so, abhängig vom Gitter, die Isometriegruppe flacher Tori bestimmen.

4.4 Klassifikation 2-dimensionaler flacher Tori bis auf Isometrie

Wir wollen 2-dimensionale Tori bis auf Isometrie klassifizieren.

Wir betrachten einen Torus $T_\Gamma = \mathbb{R}^2/\Gamma$, für ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, mit der flachen Metrik. Sei $a \in \Gamma \setminus \{0\}$ ein Element mit minimaler Norm $||a||$. Nach einer Rotation, die das Gitter auf ein isomorphes Gitter abbildet, können wir annehmen, dass a auf der positiven rechten Halbachse $\mathbb{R}_+$ liegt. Sei b der kürzeste Vektor in $\Gamma \setminus \mathbb{Z}a$. Die Vektoren a und b sind eine Basis von Γ: Falls nicht, gibt es ein Element $z \in \Gamma$, mit $z = \lambda a + \mu b$, wobei λ oder μ nicht in $\mathbb{Z}$ liegen. Durch Subtraktion von geeigneten Vielfachen von a und b folgt, dass es ein Element $z \in \Gamma$ gibt, mit $z = \lambda a + \mu b$ und $|\lambda|, |\mu| < \frac{1}{2}$, wobei einer der Koeffizienten ungleich Null ist. Dann ist:

$$\begin{aligned}
||z||^2 &= \lambda^2||a||^2 + 2\lambda\mu\langle a, b\rangle + \mu^2||b||^2 \\
&< \tfrac{1}{4}||a||^2 + \tfrac{1}{2}||a|| \cdot ||b|| + \tfrac{1}{4}||b||^2 \\
&= \tfrac{1}{4}(||a|| + ||b||)^2 \\
&\leq ||b||^2.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $||z|| < ||b||$. Damit ist z ein Vielfaches von a. Das ist ein Widerspruch.

Durch Spiegelungen an den Koordinatenachsen können wir annehmen, dass b im ersten Quadranten liegt. Die x-Koordinate von b ist kleiner gleich $\frac{1}{2}a$. Andernfalls wäre $b - a$ ein Erzeuger von Γ mit kleinerer Länge als b. Der Vektor b ist deshalb ein Element in

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq a^2, 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}a, y > 0\}.$$

Geometrisch sind das alle Punkte im ersten Quadraten, die in dem Streifen der Breite $\frac{1}{2}a$ rechts von der y-Achse, sowie auf oder oberhalb des Kreises mit Radius a liegen.

Satz 4.7 *Die 2-dimensionalen flachen Tori (T_Γ, g_Γ) entsprechen bis auf Isometrie genau den Paaren von Vektoren (a,b), wobei $a \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathcal{M}$.*

4.5 Das Laplace-Spektrum auf dem Torus

Sei $(T_\Gamma, g_\Gamma) = (\mathbb{R}^n/\Gamma, g_\Gamma)$ ein Torus, wobei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und g_Γ die von der flachen euklidischen Metrik induzierte Metrik auf T_Γ ist. Das *duale Gitter* ist definiert durch

$$\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \Gamma\}.$$

Lemma 4.8 *Für das duale Gitter gilt:*

1. *Γ^* ist ein Gitter.*
2. *$(\Gamma^*)^* = \Gamma$.*

Beweis: Zu 1.: Sei $\{e_i\}$ eine Basis von Γ mit dualer Basis $\{e_i^*\}$, definiert durch $\langle e_i^*, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Es folgt, dass $e_i^* \in \Gamma^*$ und dass die Elemente $\{e_i^*\}$ eine Basis von Γ^* bilden. Zu 2.: Eine Basis von $(\Gamma^*)^*$ ist gegeben durch $\{e_i^{**}\}$, wobei $\langle e_i^{**}, e_j^*\rangle = \delta_{ij}$. Das bedeutet, dass $e_i^{**} = e_i$, d.h. $(\Gamma^*)^* = \Gamma$. □

Wir betrachten den Raum $\mathcal{C}^\infty_\mathbb{C}(T)$ aller $\mathbb{C}$-wertigen glatten Funktionen auf dem Torus T. Wir erweitern den Laplace-Operator zu einem Operator auf diesem Raum durch

$$\Delta(u + iv) = \Delta u + i\Delta v.$$

Dieser Operator hat dasselbe Spektrum wie der Operator auf reell-wertigen Funktionen.

Definition 4.9 *Sei $x \in \Gamma^*$. Dann definieren wir die Funktion $f_x \in \mathcal{C}^\infty_\mathbb{C}(T)$ durch*

$$f_x(y) = e^{2\pi i\langle x,y\rangle}.$$

Die Funktion ist zunächst nur auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Sie ist invariant unter jedem Element $\gamma \in \Gamma$, da $x \in \Gamma^*$:

$$f_x(y+\gamma) = e^{2\pi i\langle x, y+\gamma\rangle} = e^{2\pi i\langle x,y\rangle} e^{2\pi i\langle x,\gamma\rangle} = f_x(y).$$

Deshalb definiert sie eine Funktion auf dem Torus T.

Lemma 4.10 *Die Funktion f_x ist eine Eigenfunktion des Laplace-Operators zum Eigenwert $4\pi^2||x||^2$.*

Beweis: Es gilt $f_x(y) = e^{2\pi i \sum x_i y_i}$. Deshalb ist

$$\frac{\partial^2 f_x}{\partial y_j^2} = -4\pi^2 x_j^2 f_x.$$

Damit folgt $\Delta f_x = 4\pi^2 \sum x_j^2 f_x = 4\pi^2 ||x||^2 f_x$. □

Definition 4.11 *Man definiert*

$$V_\lambda = span\left\{f_x \mid ||x||^2 = \tfrac{\lambda}{4\pi^2}, x \in \Gamma^*\right\} \subset ER_\Delta(\lambda).$$

Lemma 4.12 *Die Funktionen f_x mit $x \in \Gamma^*$, $||x||^2 = \frac{\lambda}{4\pi^2}$, bilden eine Basis von V_λ.*

Beweis: Wir zeigen folgendes: Sind $x_1, \ldots, x_k \in \Gamma^*$ paarweise verschieden, dann sind $f_{x_1}, \ldots, f_{x_k}$ linear unabhängig. Der Beweis ist durch Induktion nach k.

$k = 1$: Die Menge $\{f_{x_1}\}$ ist linear unabhängig, da f_{x_1} ungleich Null ist.
$k-1 \to k$: Seien $x_1, \ldots, x_k \in \Gamma^*$ paarweise verschieden. Angenommen

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_{x_i} = 0$$

für gewisse Koeffizienten $\beta_i \in \mathbb{C}$. Da $f_{x_1} f_{x_2} = f_{x_1+x_2}$ folgt durch Multiplikation mit f_{-x_k}

$$0 = \beta_k + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i f_{x_i - x_k}.$$

Wir wenden den Laplace-Operator auf beide Seiten dieser Gleichung an:

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i ||x_i - x_k||^2 f_{x_i - x_k}.$$

Da die x_i paarweise verschieden sind folgt mit der Induktionsannahme

$$\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0.$$

Mit der zweiten Gleichung von oben folgt $\beta_k = 0$. $\square$

Folgerung 4.13 *Die Dimension des Raumes V_λ ist gegeben durch*

$$dim\, V_\lambda = \sharp\{x \in \Gamma^* \mid ||x||^2 = \tfrac{\lambda}{4\pi^2}\}.$$

Insbesondere ist die Dimension von V_λ für $\lambda \neq 0$ gerade.

Satz 4.14 *Die Räume V_λ sind genau die Eigenräume des Laplace-Operators auf dem Torus T zum Eigenwert λ.*

Beweis: Es bleibt folgendes zu zeigen:

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda \text{ ist dicht in } \mathcal{C}^\infty_\mathbb{C}(T).$$

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist zu zeigen:

1. $V \subset \mathcal{C}^\infty_\mathbb{C}(T)$ ist eine Unteralgebra.

2. Die Konstanten liegen in V.

3. V trennt Punkte.

Zu 1.: Die Behauptung folgt, da $f_{x_1} f_{x_2} = f_{x_1+x_2}$ und mit $x_1, x_2 \in \Gamma^*$ ist auch $x_1 + x_2 \in \Gamma^*$.
Zu 2.: Es gilt $f_0 = 1$.
Zu 3.: Angenommen, es existieren $y, y' \in \mathbb{R}^n$ mit $f_x(y) = f_x(y')$ für alle $x \in \Gamma^*$. Dann gilt

$$e^{2\pi i \langle x,y \rangle} = e^{2\pi i \langle x,y' \rangle}$$

und damit $e^{2\pi i \langle x,y-y' \rangle} = 1$. Es folgt

$$\langle x, y - y' \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Nach Definition des dualen Gitters ist $y - y' \in (\Gamma^*)^* = \Gamma$. Dann gilt auf dem Torus $[y] = [y']$. □

4.6 Das Spektrum 1- und 2-dimensionaler flacher Tori

In niedrigen Dimensionen bestimmt das Spektrum einen flachen Torus bis auf Isometrie.

Satz 4.15 *Seien (M, g) und (M', g') zwei zusammenhängende kompakte 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Spec$(M, g) =$ Spec(M', g'). Dann sind (M, g) und (M', g') isometrisch.*

Beweis: Nach der Klassifikation 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten sind M und M' diffeomorph zu S^1. Zwei Kreise sind genau dann isometrisch, wenn sie die gleiche Länge haben. Der Kreis der Länge L ist gegeben durch $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Das duale Gitter ist $\mathbb{R}/\frac{1}{L}\mathbb{Z}$. Das Spektrum ist deshalb $\frac{4\pi^2 k^2}{L^2}$ mit $k = 0, 1, \ldots$ Der kleinste Eigenwert ungleich Null bestimmt die Länge. □

Satz 4.16 *Seien Γ und Γ' zwei Gitter im $\mathbb{R}^2$ mit Spec$(T^2_\Gamma, g_\Gamma) =$ Spec$(T^2_{\Gamma'}, g_{\Gamma'})$ (wobei mit Vielfachheiten gezählt wird). Dann sind (T^2_Γ, g_Γ) und $(T^2_{\Gamma'}, g_{\Gamma'})$ isometrisch.*

Beweis: Es gilt $\Gamma \cong \Gamma' \Leftrightarrow \Gamma^* \cong (\Gamma')^*$. Zu zeigen ist: $\mathrm{Spec}(T^2_\Gamma, g_\Gamma)$ bestimmt Γ^* bis auf Isometrie. Wir müssen die Vektoren a und b in Γ^* bestimmen. Der Vektor a ist nach Konstruktion das Element in Γ^* mit $a \neq 0$ und $||a||$ minimal. Es folgt, dass

$$||a|| = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\pi},$$

wobei λ_1 der kleinste Eigenwert ungleich Null ist. Zu bestimmen ist noch der zweite Erzeuger $b \in \Gamma^*$. Dazu müssen wir $||b||$ und $\langle a, b \rangle$ bestimmen. Die Länge $||b||$ ist bestimmt durch den kleinsten Wert in $\mathrm{Spec}(T^2_\Gamma, g_\Gamma) \setminus \{k^2 \lambda_1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dabei werden in $\mathrm{Spec}(T^2_\Gamma, g_\Gamma)$ die Eigenwerte mit ihrer Vielfachheit gezählt und wir enfernen für $k \neq 0$ jeweils zwei Eigenwerte (es kann also sein, dass $||b||$ ein Vielfaches von $||a||$ ist). Es gilt

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2}(||a||^2 + ||b||^2 - ||b - a||^2).$$

Zu bestimmen ist noch $||b-a||$. Nach Konstruktion ist $\langle a,b\rangle \geq 0$. Außerdem ist

$$\langle a,b\rangle = ||a|| \cdot ||b|| \cos\delta \leq ||a|| \cdot \frac{1}{2}||a|| = \frac{1}{2}||a||^2$$

wobei δ der Winkel zwischen a und b ist. Die Abschätzung folgt aus der Konstruktion von b, da $||b||\cos\delta$ die orthogonale Projektion von b auf die Richtung, die durch a definiert wird, ist. Aus diesen beiden Ungleichungen folgt

$$||b||^2 \leq ||b-a||^2 \leq ||a||^2 + ||b||^2.$$

Da $a, b \in \Gamma^*$ ist auch $b-a \in \Gamma^*$ und $4\pi^2||b-a||^2 \in \mathrm{Spec}(T_\Gamma, g_\Gamma)$. Wir entfernen aus dem Spektrum von T_Γ die Menge $\{k^2\lambda_1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und zweimal $4\pi^2||b||^2$, entsprechend den Vektoren b und $-b$. Dann ist $4\pi^2||b-a||^2$ ein Eigenwert unter dem Rest des Spektrums, den wir mit Spec' bezeichnen.

Behauptung: Es gibt in Spec' nur einen Eigenwert λ mit

$$||b||^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\lambda \leq ||a||^2 + ||b||^2.$$

Dann muß $||b-a|| = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda}$ sein. Das bestimmt $||b-a||$ aus dem Spektrum und damit den Vektor b.

Wir suchen $x \in \Gamma^*$ mit $x \neq ka$, $k \in \mathbb{Z}$, und $x \neq \pm b$, so dass

$$||b||^2 \leq ||x||^2 \leq ||a||^2 + ||b||^2.$$

Wir müssen zeigen, dass $||x||$ dadurch eindeutig festgelegt ist. Dazu zeigen wir direkt, dass $||x|| = ||b-a||$.

Wir können x schreiben als $x = \alpha a + \beta b$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$||x||^2 = \alpha^2||a||^2 + \beta^2||b||^2 + 2\alpha\beta\langle a,b\rangle.$$

Sei $P(\alpha)$, für β fest, das quadratische Polynom

$$P(\alpha) = \alpha^2||a||^2 + 2\alpha\beta\langle a,b\rangle + \beta^2||b||^2 - ||a||^2 - ||b||^2.$$

Die Ungleichung $||x||^2 \leq ||a||^2 + ||b||^2$ ist äquivalent dazu, dass $P(\alpha) \leq 0$. Falls die Diskriminante $\Delta'(\beta)$ negativ ist, hat das Polynom keine reellen Nullstellen und es gilt $P(\alpha) > 0$ für alle α. Die Diskriminante ist

$$\Delta'(\beta) = \beta^2\langle a,b\rangle^2 - ||a||^2(\beta^2||b||^2 - ||a||^2 - ||b||^2).$$

Mit den Abschätzungen $||a|| \leq ||b||$ und $\langle a,b\rangle \leq \frac{1}{2}||a||^2 \leq \frac{1}{2}||a|| \cdot ||b||$ folgt nach kurzer Rechnung

$$\Delta'(\beta) \leq \frac{1}{4}||a||^2||b||^2(8 - 3\beta^2).$$

Es gilt $\Delta'(\beta) < 0$ falls $\beta^2 > \frac{8}{3}$. Es kann also $||x||^2 \leq ||a||^2 + ||b||^2$ nur dann gelten, wenn $\beta = 0$ oder $\beta = \pm 1$. Der erste Fall scheidet aus, denn dann ist x ein Vielfaches von a, im Widerspruch zur Annahme. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\beta = 1$. Dann ist

$$P(\alpha) = \alpha^2||a||^2 + 2\alpha\langle a,b\rangle - ||a||^2.$$

Wir suchen α, so dass $P(\alpha) \leq 0$.

- $\alpha > 1$: Da $\langle a, b\rangle \geq 0$ ist dann $P(\alpha) > 0$. Dieser Fall scheidet aus.
- $\alpha = 1$: Dann kann $P(\alpha) \leq 0$ nur sein, falls $\langle a, b\rangle = 0$. In diesem Fall ist $x = a + b$ mit $||x||^2 = ||b - a||^2$.
- $\alpha = 0$: Dann ist $x = b$, im Widerspruch zur Annahme.
- $\alpha = -1$: Das ist der Fall, dass $x = b - a$ und $||x||^2 = ||b - a||^2$.
- $\alpha < -1$: Es gilt $\langle a, b\rangle \leq \frac{1}{2}||a||^2$. Damit ist

  $$P(\alpha) = (\alpha^2 - 1)||a||^2 + 2\alpha\langle a, b\rangle \geq (\alpha^2 + \alpha - 1)||a||^2.$$

  Das ist positiv für $\alpha < -1$. Dieser Fall kann auch ausgeschlossen werden.

□

4.7 Das Gegenbeispiel von Milnor

Das Ziel in diesem Abschnitt ist die Konstruktion von zwei isospektralen, aber nicht isometrischen flachen Tori in jeder Dimension ≥ 16.

Bemerkung: Die Isospektralität zweier Tori $\mathbb{R}^n/\Gamma_1$ und $\mathbb{R}^n/\Gamma_2$ ist äquivalent dazu, dass jeder Ball in $\mathbb{R}^n$ um die Null genau so viele Elemente aus Γ_1^* wie aus Γ_2^* enthält.

Satz 4.17 *Seien (T_Γ, g_Γ) und $(T_{\Gamma'}, g_{\Gamma'})$ zwei n-dimensionale nicht-isometrische Tori. Dann existiert für jedes $k \geq 1$ ein k-dimensionaler Torus $(T_{\Gamma''}, g_{\Gamma''})$, so dass $(T_\Gamma, g_\Gamma) \times (T_{\Gamma''}, g_{\Gamma''})$ und $(T_{\Gamma'}, g_{\Gamma'}) \times (T_{\Gamma''}, g_{\Gamma''})$ nicht isometrisch sind.*

Beweis: Durch Induktion reicht es die Behauptung für $k = 1$ zu beweisen. In $(\mathbb{R}, g_0)$ wählt man einen Vektor a, dessen Länge kleiner als alle Längen von Vektoren in Γ, Γ' ist. Man betrachtet in $\mathbb{R}^{n+1}$ die Gitter $\Gamma \oplus \mathbb{Z}a$ und $\Gamma' \oplus \mathbb{Z}a$. Diese Gitter sind nicht isometrisch: Jede Isometrie von $\mathbb{R}^{n+1}$, welche die Gitter ineinander überführt, erhält den Vektor a und induziert eine Isometrie der orthogonalen Komplemente Γ und Γ', im Widerspruch zur Annahme. □

Wir definieren im folgenden für jede natürliche Zahl $n \equiv 0 \bmod 8$ ein gewisses Gitter $\Gamma(n)$ vom Rang n. Wir zeigen, dass die Tori zu den Gittern $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$ nicht isometrisch, aber isospektral sind.

Sei $n \equiv 0 \bmod 8$. Wir definieren Gitter $\Gamma_1 = \mathbb{Z}^n$ und

$$\Gamma_2 = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_1 \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \bmod 2 \right\}.$$

Das Gitter Γ_2 ist ein Untergitter von Γ_1 vom Index 2. Sei

$$w_n = \left(\tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Wir setzen

$$\Gamma(n) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{\Gamma_2, w_n\} = \{x + kw_n \mid x \in \Gamma_2, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist $\Gamma(n)$ ein Gitter in $\mathbb{R}^n$. Wegen

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= \{x + 2lw_n \mid l \in \mathbb{Z}\} \cup \{x + (2l+1)w_n \mid l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \Gamma_2 \cup (w_n + \Gamma_2)\end{aligned}$$

ist Γ_2 ein Untergitter von $\Gamma(n)$ vom Index 2.

Das Volumen $\mathrm{vol}(\Gamma)$ eines Gitters ist definiert als das Volumen $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ des entsprechenden Torus. Es gilt

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = \det(\langle v_i, v_j\rangle),$$

wobei $v_1, \ldots, v_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Γ ist. Da Γ_2 ein Untergitter von $\Gamma(n)$ und $\mathbb{Z}^n$ vom Index 2 ist, sind

$$\mathbb{R}^n/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^n/\Gamma(n) \text{ und } \mathbb{R}^n/\Gamma_2 \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

2-blättrige Überlagerungen. Das Volumen ist multiplikativ unter Überlagerungen:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\Gamma_2) &= 2\mathrm{vol}(\Gamma(n)) \\ \mathrm{vol}(\Gamma_2) &= 2\mathrm{vol}(\mathbb{Z}^n).\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\mathrm{vol}(\Gamma(n)) = \mathrm{vol}(\mathbb{Z}^n) = 1$.

Lemma 4.18 *Für jeden Vektor $y \in \Gamma(n)$ ist $||y||^2 \in 2\mathbb{Z}$, insbesondere ist $||y||^2$ ganzzahlig.*

Beweis: Der Beweis ist in drei Schritten: Sei $y \in \Gamma_2$. Dann ist $y = (y_1, \ldots, y_n)$ mit $\sum y_i \equiv 0 \bmod 2$. Es folgt

$$||y||^2 = \sum_i y_i^2 = \left(\sum_i y_i\right)^2 - 2\sum_{i \neq j} y_i y_j \equiv 0 \bmod 2.$$

Sei y von der Form kw_n. Dann ist $y_i = \frac{k}{2}$ und

$$||y||^2 = n\frac{k^2}{4} \equiv 0 \bmod 2,$$

da $n \equiv 0 \bmod 8$. Sei schließlich $y = x + kw_n$ mit $x \in \Gamma_2$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$||y||^2 = ||x||^2 + ||kw_n||^2 + 2\langle x, kw_n\rangle.$$

Es gilt

$$\langle x, w_n\rangle = \frac{1}{2}\sum_i x_i \in \mathbb{Z}$$

nach Definition von Γ_2. Es folgt $||y||^2 \equiv 0 \bmod 2$. $\square$

Lemma 4.19 *Es gilt $\Gamma(n) = \Gamma(n)^*$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\Gamma(n) \subset \Gamma(n)^*$. Dazu ist zu zeigen: Für alle $y, y' \in \Gamma(n)$ gilt $\langle y, y' \rangle \in \mathbb{Z}$. Sei $y = x + kw_n, y' = x' + k'w_n$ mit $x, x' \in \Gamma_2$. Es folgt:

$$\langle y, y' \rangle = \langle x, x' \rangle + k' \langle x, w_n \rangle + k \langle w_n, x' \rangle + kk' ||w_n||^2.$$

Im Beweis von Lemma 4.18 haben wir gesehen, dass $\langle x, w_n \rangle$ und $\langle w_n, x' \rangle$ ganzzahlig sind. Außerdem ist $||w_n||^2 = \frac{n}{4}$ ganzzahlig. Damit folgt $\langle y, y' \rangle \in \mathbb{Z}$. Die Behauptung, dass $\Gamma(n) = \Gamma(n)^*$, folgt wegen $\mathrm{vol}(\Gamma(n)) = \mathrm{vol}(\Gamma(n)^*)$. Das ist mit $\mathrm{vol}(\Gamma(n)) = 1$ eine Konsequenz des nächsten Lemmas. □

Lemma 4.20 *Für jedes Gitter Γ gilt*

$$vol(\Gamma^*) = \frac{1}{vol(\Gamma)}.$$

Beweis: Sei $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ eine Basis von Γ und $\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_n^*$ die duale Basis von Γ^* mit $\langle \epsilon_i^*, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}$. Es gilt

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = \det(\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle), \quad \mathrm{vol}(\Gamma^*) = \det(\langle \epsilon_i^*, \epsilon_j^* \rangle).$$

Wir definieren eine Matrix $A = (a_{ij})$ durch $\epsilon_i^* = \sum_j a_{ij} \epsilon_j$. Es folgt

$$\mathrm{vol}(\Gamma^*) = \det(A)^2 \mathrm{vol}(\Gamma).$$

Andererseits ist

$$\delta_{ij} = \langle \epsilon_i^*, \epsilon_j \rangle = \sum_k a_{ik} \langle \epsilon_k, \epsilon_j \rangle,$$

d.h. $E = A \cdot (\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle)$. Mit der Determinante auf beiden Seiten folgt $1 = \det(A)\mathrm{vol}(\Gamma)$. Damit folgt die Behauptung. □

Zusammenfassend haben wir für jedes $n \equiv 0 \mod 8$ ein Gitter $\Gamma(n) \subset \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

RW 1: $\forall x \in \Gamma(n) : ||x||^2 \equiv 0 \mod 2$
RW 2: $\Gamma(n) = \Gamma(n)^*$.

Lemma 4.21 *Die Gitter $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$ sind nicht isometrisch.*

Beweis: Wir zeigen, dass $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ durch Elemente mit Längenquadrat gleich 2 erzeugt wird und dass $\Gamma(16)$ nicht auf diese Weise erzeugt werden kann.

Das Gitter Γ_2 wird erzeugt von den Vektoren

$$e_1 - e_8, e_2 - e_8, \ldots, e_7 - e_8, 2e_8.$$

Das Gitter $\Gamma(8)$ wird erzeugt von

$$e_1 - e_8, e_2 - e_8, \ldots, e_7 - e_8, 2e_8, w_8.$$

Bis auf $2e_8$ haben alle diese Vektoren Längenquadrat gleich 2. Es gilt

$$2e_8 = 2w_8 - (e_1 + e_2) - (e_3 + e_4) - (e_5 + e_6) - (e_7 - e_8).$$

Deshalb wird $\Gamma(8)$ erzeugt von

$$\begin{gathered} e_1 - e_8, e_2 - e_8, \dots, e_7 - e_8, \\ e_1 + e_2, e_3 + e_4, e_5 + e_6, w_8. \end{gathered}$$

Diese Vektoren haben alle Längenquadrat 2.
Die Elemente von $\Gamma(16)$ sind von der Form

$$\begin{aligned} & a_1 e_1 + \dots, a_{16} e_{16} \\ & \text{oder } (a_1 + \tfrac{1}{2}) e_1 + \dots + (a_{16} + \tfrac{1}{2}) e_{16}, \quad a_i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ein System von Erzeugern muß Elemente vom zweiten Typ enthalten. Für die Norm eines solchen Vektors v gilt

$$||v||^2 = \sum_{i=1}^{16} (a_i + \tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{16} (2a_i + 1)^2 \geq 4.$$

Das zeigt die Behauptung für $\Gamma(16)$. □

Der Beweis des folgenden Satzes ist relativ aufwendig.

Satz 4.22 *Seien Γ, Γ' zwei Gitter im $\mathbb{R}^n$, $n = 8, 12, 16, 20$, mit den Eigenschaften RW 1 und RW 2. Dann sind die entsprechenden Tori isospektral.*

Zum Beweis betrachten wir für den Laplace-Operator auf einem Torus $(\mathbb{R}^n/\Gamma, g_\Gamma)$ die sogenannte *Partitionsfunktion*:

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\lambda_i t}.$$

Dabei sind λ_i mit

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

die paarweise verschiedenen Eigenwerte von Δ und m_i die entsprechenden Multiplizitäten, d.h. die Dimension der Eigenräume. Es gilt:

- Z ist wohldefiniert für $t > 0$.
- Z ist stetig auf $(0, \infty)$.
- Z bestimmt das Spektrum.

Die ersten beiden Eigenschaften nehmen wir ohne Beweis an. Um die dritte Eigenschaft zu begründen, betrachtet man die Funktion

$$e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t}.$$

Dann ist λ_1 der eindeutig bestimmte Wert μ, für den man bei $t \to \infty$ einen positiven Grenzwert erhält. Dieser Grenzwert ist m_1. Allgemeiner kann man aus dem Grenzwert der Funktion

$$e^{\mu t} Z(t) - \sum_{j=0}^{i-1} m_j e^{(\mu - \lambda_j)t}$$

die Werte λ_i und m_i bestimmen.
Sei $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ eine stark-fallende Funktion (Schwartz-Funktion). Dann ist die Fouriertransformierte von f definiert durch

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dy.$$

Satz 4.23 (Summenformel von Poisson) *Für jedes Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\sum_{k \in \Gamma} f(k) = \frac{1}{vol(\Gamma)} \sum_{m \in \Gamma^*} \tilde{f}(m).$$

Beweis: Die Funktion

$$g(x) = \sum_{k \in \Gamma} f(x+k)$$

ist Γ-invariant und definiert eine Funktion auf dem Torus $T = \mathbb{R}^n/\Gamma$. Wir können g nach den Eigenfunktionen des Laplace-Operators entwickeln:

$$g(x) = \sum_{m \in \Gamma^*} c_m e^{2\pi i \langle m,x \rangle},$$

mit

$$c_m = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma)} \int_T g(y) e^{-2\pi i \langle m,y \rangle} dy.$$

Es gilt

$$\sum_{k \in \Gamma} f(k) = g(0) = \sum_{m \in \Gamma^*} c_m = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma)} \sum_{m \in \Gamma *} \int_T g(y) e^{-2\pi i \langle m,y \rangle} dy.$$

Aber

$$\begin{aligned}
\int_T g(y) e^{-2\pi i \langle m,y \rangle} dy &= \sum_{k \in \Gamma} \int_T f(y+k) e^{-2\pi i \langle m,y \rangle} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle m,y \rangle} dy \\
&= \tilde{f}(m).
\end{aligned}$$

□

Wir wenden diese Formel auf den Fall $f(x) = e^{-\pi||x||^2}$ an. Dazu definieren wir ein Gitter $\Gamma_t = \sqrt{t}\Gamma$. Das Gitter Γ erfülle RW 1 und RW 2. Da f gleich seiner eigenen Fouriertransformierten ist, folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\Gamma} e^{-\pi||x||^2 t} &= \sum_{x\in\Gamma_t} e^{-\pi||x||^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_t)} \sum_{y\in\Gamma_t^*} e^{-\pi||y||^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_t)} \sum_{y\in\Gamma^*} e^{-\pi||y||^2\frac{1}{t}} \\ &= t^{-\frac{n}{2}} \sum_{y\in\Gamma^*} e^{-\pi||y||^2\frac{1}{t}}.\end{aligned}$$

Für die Eigenwerte des Laplace-Operators auf dem Torus T gilt die Formel:

$$\lambda_i = 4\pi^2||x||^2, \quad x \in \Gamma^*.$$

Deshalb ist

$$Z\left(\frac{t}{4\pi}\right) = \sum_{x\in\Gamma^*} e^{-\pi||x||^2 t}.$$

Wir definieren diese Funktion als $\Theta_\Gamma(t)$. Wir haben gerade gesehen, dass Θ_Γ die Gleichung

$$\Theta_\Gamma(t) = t^{-\frac{n}{2}}\Theta_\Gamma\left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0$$

erfüllt.

Lemma 4.24 Θ_Γ *hat eine holomorphe Fortsetzung auf die rechte Halbebene (Re*$(z) > 0$*).*

Die Funktion $\Theta_\Gamma(z) - z^{-\frac{n}{2}}\Theta_\Gamma(\frac{1}{z})$ ist holomorph und identisch Null auf der rechten Achse $\mathbb{R}_+$. Deshalb gilt

$$\Theta_\Gamma(z) = z^{-\frac{n}{2}}\Theta_\Gamma\left(\frac{1}{z}\right) \text{ auf } \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Wir setzen $\hat{\Theta}_\Gamma(z) = \Theta_\Gamma(-iz)$. Die Funktion $\hat{\Theta}_\Gamma$ ist holomorph auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Lemma 4.25 *Es gilt:*

1. $\hat{\Theta}_\Gamma(z) = z^{-\frac{n}{2}}\hat{\Theta}_\Gamma\left(-\frac{1}{z}\right)$.
2. $\hat{\Theta}_\Gamma(z+1) = \hat{\Theta}_\Gamma(z)$.
3. $\hat{\Theta}(z) \to 1$ *für Im*$(z) \to \infty$.

Beweis: Es gilt mit $w = -iz$

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}(z) &= \Theta_\Gamma(w)\\ &= w^{-\frac{n}{2}}\Theta_\Gamma\left(\frac{1}{w}\right)\\ &= z^{-\frac{n}{2}}\Theta_\Gamma\left(\frac{i}{z}\right)\\ &= z^{-\frac{n}{2}}\hat{\Theta}_\Gamma\left(-\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

Im Schritt zur dritten Zeile haben wir verwendet, dass $n \equiv 0 \bmod 8$. Das beweist die erste Eigenschaft. Die zweite Eigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_\Gamma(z+1) &= \sum_{x\in\Gamma} e^{-\pi i||x||^2 z} e^{-\pi i||x||^2}\\ &= \hat{\Theta}_\Gamma(z),\end{aligned}$$

da $e^{-\pi i||x||^2} = 1$, wegen $||x||^2 \equiv 0 \bmod 2$. Die dritte Eigenschaft ist klar, da im Grenzwert in der Summe über $x \in \Gamma$ nur $x = 0$ einen Beitrag liefert. □

Definition 4.26 *Eine* Modulform *vom Gewicht k ist eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ mit*

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{-k} f(z)$$

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$.

Seien

1. $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Da S und T die ganze Gruppe $SL(2,\mathbb{Z})$ erzeugen, folgt mit den entsprechenden Eigenschaften aus Lemma 4.25, dass $\hat{\Theta}_\Gamma$ eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ ist.
Modulformen vom Gewicht k bilden einen Vektorraum M_k. Die Dimension ist gegeben durch

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & k \equiv 2 \bmod 12 \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & k \not\equiv 2 \bmod 12. \end{cases}$$

Deshalb ist für $n = 2k = 8, 12, 16, 20$ die Dimension von M_k gleich eins und Eigenschaft 3. in Lemma 4.25 legt $\hat{\Theta}_\Gamma$ eindeutig fest. Dadurch sind auch die Partitionsfunktion $Z(t)$ und das Spektrum des Laplace-Operators festgelegt. Satz 4.22 ist damit bewiesen. Zusammenfassend sind die Tori, die zu den Gittern $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$ gehören, Beispiele für isospektrale, nicht-isometrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

4.8 Die Weylsche Asymptotik auf dem Torus

Satz 4.27 *Sei $N(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte des Laplace-Operators Δ kleiner gleich λ (mit Vielfachheit gezählt) auf einem flachen Torus T. Dann gilt für $\lambda \to \infty$*

$$N(\lambda) \sim \omega_n \lambda^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{vol(T)}{(2\pi)^n}, \tag{4.11}$$

wobei $n = dim T$ und $\omega_n = vol(B^n(1))$ das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes ist.

Beweis: Die Eigenwerte auf dem Torus $T = \mathbb{R}^n/\Gamma$ sind gegeben durch $\lambda = 4\pi^2||x||^2$ für $x \in \Gamma^*$. Sei

$$\mathcal{N}^*(r) = \sharp(\Gamma^* \cap \bar{B}^n(r)).$$

Dann ist die asymptotische Gleichung (4.11) äquivalent zu

$$\mathcal{N}^*(r) \sim \omega_n r^n \cdot \mathrm{vol}(T) \text{ for } r \to \infty.$$

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von Γ und $v \in \Gamma$ ein beliebiger fester Vektor. Dann schreibt sich v als $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$. Wir nennen den Fundamentalbereich

$$P(v) = \left\{ x = \sum_{j=1}^n x_j v_j \mid \alpha_j < x_j < \alpha_j + 1 \right\}$$

eine Kopie von T. Nach Lemma 4.20 gilt

$$\mathrm{vol}(T) = \mathrm{vol}(P(v)) = \frac{1}{\mathrm{vol}(T^*)},$$

wobei $T^* = \mathbb{R}^n/\Gamma^*$. Damit ist Gleichung (4.11) äquivalent zu

$$\mathcal{N}^*(r) \sim \omega_n r^n \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}(T^*)}.$$

Sei $w \in \Gamma^*$ und $P^*(w)$ der Fundamentalbereich, bzw. die Kopie von T^* analog zu oben. Mit d bezeichnen wir den Durchmesser von $P^*(w)$. Dieser hängt nicht von w ab. Sei $\mathcal{P}^*(r)$ die Anzahl der Kopien von T^*, die ganz in $\bar{B}^n(r)$ enthalten sind. Es gilt

$$\mathcal{P}^*(r) \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \mathcal{P}^*(r+d).$$

Sei $\mathcal{C}^*(r)$ der Polyeder, der von allen Kopien von T^* gebildet wird, die in $\bar{B}^n(r)$ enthalten sind. Es gilt

$$\mathrm{vol}(\mathcal{C}^*(r)) = \mathrm{vol}(T^*) \cdot \mathcal{P}^*(r)$$

und damit

$$\mathrm{vol}(T^*) \cdot \mathcal{P}^*(r) \leq \omega_n r^n.$$

Sei

$$\beta(r) = \min\{||y|| \mid y \in \Gamma^* \cap \partial C^*(r)\}.$$

Es gilt $\beta(r) > r - d$ und damit $\mathcal{C}^*(r) \supset \bar{B}^n(r-d)$. Indem wir das Volumen auf beiden Seiten bilden, folgt

$$\mathrm{vol}(T^*) \cdot \mathcal{P}^*(r) \geq \omega_n (r-d)^n.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass

$$\omega_n (r-d)^n \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}(T^*)} \leq \mathcal{P}^*(r) \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \mathcal{P}^*(r+d) \leq \omega_n (r+d)^n \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}(T^*)}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

5 Der Laplace-Operator auf Formen

Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Laplace-Operator auf p-Formen $\Omega^p(M)$ ist definiert als $\Delta = d^*d + dd^*$. Einige bekannte Eigenschaften dieses Operators sind:

Lemma 5.1 *Für den Laplace-Operator auf p-Formen gilt:*

1. *Δ ist symmetrisch:*
$$(\Delta\alpha, \beta)_{L^2} = (\alpha, \Delta\beta)_{L^2}$$
für alle $\alpha, \beta \in \Omega_c^p(M)$.
2. *$\Delta d = d\Delta$, $\Delta d^* = d^*\Delta$, $\Delta * = *\Delta$.*
3. *$\Delta|_{\Omega^0(M)} = d^*d$.*
4. *Δ ist elliptisch. Daraus folgt, dass auf kompakten Mannigfaltigkeiten der Laplace-Operator auf $\Omega^p(M)$ ein diskretes Spektrum mit Eigenwerten ≥ 0 und endlicher Vielfachheit hat.*

Sei M im folgenden kompakt.

Definition 5.2 *Die Formen im Kern von Δ nennt man* harmonisch. *Wir schreiben*

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(M, g) = \mathit{ker}\left(\Delta|_{\Omega^p(M)}\right)$$

für den Vektorraum der harmonischen p-Formen.

Lemma 5.3 *Sei (M, g) eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$\omega \textit{ harmonisch} \Leftrightarrow d\omega = 0, d^*\omega = 0.$$

Beweis: Die Richtung $\Leftarrow$ ist klar. Sei ω harmonisch.

$$\begin{aligned}\Delta\omega = 0 &\Rightarrow d^*d\omega + dd^*\omega = 0 \\ &\Rightarrow (d^*d\omega, \omega) + (dd^*\omega, \omega) = 0 \\ &\Rightarrow ||d\omega||^2 + ||d^*\omega||^2 = 0 \\ &\Rightarrow d\omega = 0, d^*\omega = 0.\end{aligned}$$

□

5.1 Hodge Theorie

In diesem Abschnitt sei M kompakt und orientiert.

Satz 5.4 (Hodge-de Rham) *Sei (M, g) eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

1. *$\dim \mathcal{H}^p(M) < \infty$.*

2. *Man hat folgende orthogonale Zerlegung in eine direkte Summe:*

$$\begin{aligned}\Omega^p(M) &= \operatorname{im}\Delta \oplus \ker\Delta \\ &= \Delta(\Omega^p(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M) \\ &= d^* d\Omega^p(M) \oplus dd^*\Omega^p(M) \oplus \mathcal{H}^p \\ &= d^*(\Omega^{p+1}(M)) \oplus d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus \mathcal{H}^p.\end{aligned}$$

3. *Der Vektorraum der harmonischen Formen ist isomorph zur de Rham Kohomologie:*

$$\mathcal{H}^p(M) \cong H^p_{dR}(M).$$

   Dabei ist

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\ker(d\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))}{\operatorname{im}(d\colon \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))}.$$

Bemerkungen:

- Die Gleichung $\Delta\omega = \alpha$ hat genau dann eine Lösung ω, wenn α orthogonal zu $\mathcal{H}^p$ ist. Das folgt aus der ersten Gleichung in 2. in Satz 5.4.

- Jede p-Form ω kann als eindeutige Summe gschrieben werden:

$$\omega = d^*\omega_1 + d\omega_2 + H(\omega),$$

  wobei $H(\omega)$ die orthogonale Projektion von ω auf $\mathcal{H}^p$ ist. Die Formen ω_1, ω_2 sind dabei nicht eindeutig.

- $\mathcal{H}^0 \cong H^0_{dR} \cong \mathbb{R}$, gegeben durch die konstanten Funktionen, falls M zusammenhängend ist.

- Falls M zusammenhängend ist und Dimension n hat, gilt

$$\mathcal{H}^n \cong H^n_{dR}(M) \cong \mathbb{R},$$

  gegeben durch die konstanten Vielfachen der Riemannschen Volumenform $dvol_g$.

Lemma 5.5 *Die Abbildung $\mathcal{H}^p(M) \to H^p_{dR}(M), \omega \mapsto [\omega]$, ist injektiv.*

Beweis: Sei $\omega \in \mathcal{H}^p(M)$ mit $[\omega] = 0$. Dann existiert eine Form η, so dass $\omega = d\eta$. Da $\omega \in \mathcal{H}^p$ ist, folgt $d\omega = 0, d^*\omega = 0$, d.h. $d^*d\eta = 0$. Das L^2-Skalarprodukt mit η impliziert $d\eta = 0$ und damit $\omega = 0$. Ein anderer Beweis folgt aus der letzten Gleichung in 2. in Satz 5.4. □

Definition 5.6 *Der* Green-Operator $G\colon \Omega^p(M) \to \mathcal{H}^p(M)^\perp$ *ist definiert durch:* $G(\alpha)$ *ist die eindeutig bestimmte Lösung* ω *der Gleichung*

$$\Delta\omega = \alpha - H(\alpha),$$

d.h.

$$G = \left(\Delta|_{(\mathcal{H}^p)^\perp}\right)^{-1} \circ \pi_{(\mathcal{H}^p)^\perp},$$

wobei π *die orthogonale Projektion bezeichnet. Es gilt*

$$\Delta G(\alpha) = \alpha - H(\alpha).$$

Der Operator G *ist nach 2. in Satz 5.4 wohldefiniert.*

Lemma 5.7 *G ist ein beschränkter, selbstadjungierter, linearer Operator.*

Lemma 5.8 *G kommutiert mit jedem Operator T, der mit Δ kommutiert, insbesondere mit d, d^* und Δ.*

Beweis: Sei $T\colon \Omega^p \to \Omega^q$ ein linearer Operator mit $T\Delta = \Delta T$. Es folgt

$$T(\ker\Delta) \subset \ker\Delta$$
$$T(\operatorname{im}\Delta) \subset \operatorname{im}\Delta,$$

d.h.

$$T(\mathcal{H}^p) \subset \mathcal{H}^q$$
$$T((\mathcal{H}^p)^\perp) \subset (\mathcal{H}^q)^\perp.$$

Es gilt

$$T \circ \pi_{(\mathcal{H}^p)^\perp} = \pi_{(\mathcal{H}^q)^\perp} \circ T$$
$$T \circ \Delta|_{(\mathcal{H}^p)^\perp} = \Delta|_{(\mathcal{H}^q)^\perp} \circ T.$$

Damit folgt $T \circ G = G \circ T$ nach der Definition von G. □

Satz 5.9 *Jede Klasse in der de Rham Kohomologie auf einer kompakten, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit hat einen eindeutig bestimmten harmonischen Repräsentanten.*

Beweis: Sei $\alpha \in \Omega^p$ mit $d\alpha = 0$. Wir wollen zunächst zeigen, dass $[\alpha] = [H(\alpha)] \in H^p_{dR}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Delta G(\alpha) + H(\alpha) \\
&= dd^*G\alpha + d^*dG\alpha + H(\alpha) \\
&= dd^*G\alpha + d^*Gd\alpha + H(\alpha) \\
&= d(d^*G\alpha) + H(\alpha).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit des harmonischen Repräsentanten. Seien α_1, α_2 harmonisch mit $[\alpha_1] = [\alpha_2]$. Dann gibt es eine Form β mit $d\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. Es gilt:

$$||\alpha_1 - \alpha_2||^2 = (d\beta, \alpha_1 - \alpha_2) = (\beta, d^*(\alpha_1 - \alpha_2)) = 0,$$

da $\alpha_1 - \alpha_2$ harmonisch ist. Also ist $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Bemerkung: In einer Übungsaufgabe wird gezeigt: Der harmonische Repräsentant einer Kohomologieklasse ist genau der mit minimaler L^2-Norm.

Folgerung 5.10 *Ist M kompakt und orientiert, dann ist $dim\, H^p_{dR}(M) < \infty$.*

Definition 5.11 *Die p-te* Betti Zahl *ist definiert als*

$$b_p(M) = dim\, H^p_{dR}(M).$$

Die Euler Charakteristik *ist definiert als*

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b_p(M), \quad n = dim\, M.$$

Beispiele: Einige Beispiele für Betti Zahlen von Mannigfaltigkeiten:

- $M = S^n$:
$$b_p = \begin{cases} 1 & p = 0, n \\ 0 & p \neq 0, n. \end{cases}$$
- $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$:
$$b_p = \begin{cases} 1 & 0 \leq p \leq 2n \text{ gerade} \\ 0 & p \text{ ungerade.} \end{cases}$$
- $M = \Sigma_g$ Riemannsche Fläche vom Geschlecht g:
$$b_p = \begin{cases} 1 & p = 0, 2 \\ 2g & p = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- $M = T^n$:
$$b_p = \binom{n}{p}.$$

Folgerung 5.12 (Poincaré Dualität) *Sei M^n kompakt und orientiert. Dann gilt*

$$H^p_{dR}(M) \cong H^{n-p}_{dR}(M).$$

Insbesondere ist $b_p(M) = b_{n-p}(M)$.

Beweis: Wir wählen eine Riemannsche Metrik auf M. Da der Hodge-Stern $*$ mit dem Laplace-Operator kommutiert, liefert $*$ einen Isomorphismus von $\mathcal{H}^p(M)$ mit $\mathcal{H}^{n-p}(M)$. Daraus folgt die Behauptung.

5.2 Der Bochner-Laplace Operator

Das Ziel in diesem Abschnitt ist die Darstellung der Bochner Methode, die Verschwindungssätze für Betti-Zahlen unter geometrischen Voraussetzungen liefert.

Definition 5.13 *Der* Bochner-Laplace Operator *(rough Laplacian) ist definiert durch:*

$$\nabla^*\nabla\colon \Omega^p(M) \to \Omega^p(M), \quad \nabla^*\nabla\omega = -tr(\nabla^2\omega).$$

Dabei ist

$$\Gamma(\Lambda^p M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^p M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \Lambda^p M) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \Gamma(\Lambda^p M),$$

mit $\mathrm{tr}(X \otimes Y \otimes \omega) = g(X,Y)\omega$. Es gilt

$$\nabla^2_{X,Y}\omega = \nabla_X(\nabla_Y\omega) - \nabla_{\nabla_X Y}\omega$$

und

$$\nabla^2\omega = \sum_{i,j} e_i^\flat \otimes e_j^\flat \otimes \nabla^2_{e_i,e_j}\omega,$$

wobei $\{e_i\}$ eine lokale Orthonormalbasis von TM ist und $\{e_i^\flat\}$ die dazu duale Basis. Es folgt die lokale Formel

$$\nabla^*\nabla\omega = -\sum_i \nabla^2_{e_i,e_i}\omega = -\sum_i (\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}\omega) - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\omega).$$

Bemerkung: Für $p = 0$, d.h. $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$, ist

$$\nabla^*\nabla f = \Delta f.$$

Wir betrachten eine allgemeinere Situation. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Fasermetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und metrischer kovarianter Ableitung ∇^E. Dann ist für

$$\nabla^E\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

der adjungierte Operator

$$(\nabla^E)^*\colon \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(E)$$

definiert durch

$$(\nabla^E s_1, s_2) = (s_1, (\nabla^E)^* s_2), \quad s_1 \in \Gamma(E), s_2 \in \Gamma(T^*M \otimes E).$$

Dabei ist $(\cdot,\cdot)$ das L^2-Skalarprodukt auf den Schnitten in den entsprechenden Bündeln. Die Metrik auf einem Tensorprodukt $E \otimes F$ ist allgemein definiert durch

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle\langle f_1, f_2\rangle.$$

Beispiel: Für $\alpha, \beta \in T^*M \otimes E$ gilt

$$\alpha = \sum_i e_i^\flat \otimes \alpha(e_i), \quad \beta = \sum_i e_i^\flat \otimes \beta(e_i)$$

für eine lokale Orthonormalbasis $\{e_i\}$ und

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i \langle \alpha(e_i), \beta(e_i) \rangle.$$

Zum Beispiel ist für $\omega, \eta \in \Gamma(E)$

$$\langle \nabla \omega, \nabla \eta \rangle = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \omega, \nabla_{e_i} \eta \rangle.$$

Wir können einen Zusammenhang auf $E \otimes F$ definieren durch

$$\nabla_X^{E \otimes F}(e \otimes f) = \nabla_X^E e \otimes f + e \otimes \nabla_X^F f.$$

Lemma 5.14 *Für den adjungierten Operator gilt:*

1. $(\nabla^E)^* = -tr(\nabla^{T^*M \otimes E})$.
2. $(\nabla^E)^* \nabla^E s = -\sum (\nabla_{e_i}^E (\nabla_{e_i}^E s) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^E s)$ *für eine lokale Orthonormalbasis* $\{e_i\}$.

Bemerkung: Für die Krümmung eines Bündels E gilt

$$R_{XY}^E = \nabla_{X,Y}^{2\,E} - \nabla_{Y,X}^{2\,E} = \nabla_X^E \nabla_Y^E - \nabla_Y^E \nabla_X^E - \nabla_{[X,Y]}^E.$$

5.3 Der Operator $q(R)$

Sei T ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$; später ist $T = T_x M$ für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g). Wir haben den Isomorphismus

$$\flat \colon T \xrightarrow{\cong} T^*, X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Wir bezeichnen die schiefsymmetrischen Endomorphismen von T mit $so(T)$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\Lambda^2 T \xrightarrow{\cong} so(T),$$

durch

$$(X \wedge Y)A = \langle X, A \rangle Y - \langle Y, A \rangle X, \quad \forall X, Y, A \in T.$$

Das Skalarprodukt auf $\Lambda^2 T$ ist definiert durch

$$\langle X \wedge Y, A \wedge B \rangle = \langle X, A \rangle \langle Y, B \rangle - \langle X, B \rangle \langle Y, A \rangle.$$

Dann gilt

$$\langle (X \wedge Y)A, B \rangle = \langle X \wedge Y, A \wedge B \rangle.$$

Außerdem gibt es eine Darstellung von $so(T)$ auf $\Lambda^k T^*$ durch

$$(X \wedge Y)_* \lambda = Y^\flat \wedge (X \lrcorner \omega) - X^\flat \wedge (Y \lrcorner \omega), \quad \forall X, Y \in T, \omega \in \Lambda^k T^*.$$

Beispiel: Für eine 1-Form $\lambda \in T^*$ gilt

$$\begin{aligned}((X \wedge Y)_* \lambda)(Z) &= \lambda(X)\langle Y, Z\rangle - \lambda(Y)\langle X, Z\rangle \\ &= -\lambda(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X) \\ &= -\lambda((X \wedge Y)Z).\end{aligned}$$

Die Darstellung von $so(T)$ auf $\Lambda^k T^*$ ist eine Fortsetzung der Darstellung auf T^* als Derivation. Zum Beispiel gilt auf 2-Formen der Gestalt $\lambda \wedge \mu$:

$$\begin{aligned}(X \wedge Y)_*(\lambda \wedge \mu) &= Y^\flat \wedge (\lambda(X)\mu - \mu(X)\lambda) - X^\flat \wedge (\lambda(Y)\mu - \mu(Y)\lambda) \\ &= (Y^\flat \lambda(X) - X^\flat \lambda(Y)) \wedge \mu + \lambda \wedge (Y^\flat \mu(X) - X^\flat \mu(Y)) \\ &= ((X \wedge Y)_* \lambda) \wedge \mu + \lambda \wedge ((X \wedge Y)_* \mu).\end{aligned}$$

Die Darstellung von von $so(T)$ auf $\Lambda^k T^* M$ ist das Differential der Darstellung von $SO(T)$. Zum Beispiel ist auf 2-Formen

$$g(\lambda \wedge \mu) = (g\lambda) \wedge (g\mu), \quad \forall g \in SO(T)$$

mit dem Differential

$$A_*(\lambda \wedge \mu) = (A_* \lambda) \wedge \mu + \lambda \wedge (A_* \mu), \quad \forall A \in so(T).$$

Definition 5.15 *Der* Krümmungsoperator $\mathcal{R}\colon \Lambda^2 T \to \Lambda^2 T$ *auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist mit dem Skalarprodukt auf* $\Lambda^2 T$ *von oben definiert durch*

$$\langle \mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge W\rangle = \langle \mathcal{R}(X \wedge Y)Z, W\rangle = \langle R_{XY} Z, W\rangle.$$

Der Operator $\mathcal{R}$ *ist ein symmetrischer Bündelendomorphismus.*

Beispiel: Für S^n, $n \geq 2$, mit der kanonischen Metrik gilt

$$R_{XY} Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y.$$

Daraus folgt $\mathcal{R}(X \wedge Y) = -X \wedge Y$, d.h. $\mathcal{R} = -\mathrm{Id}$. Es gilt $K \equiv 1, \mathrm{Ric} = n - 1, \mathrm{scal} = n(n-1)$.

Lemma 5.16 *In einer Orthonormalbasis* $\{e_i\}$ *gilt*

$$\mathcal{R}(X \wedge Y) = \frac{1}{2} \sum_i e_i \wedge R_{XY} e_i.$$

Beweis: Wir definieren Koeffizienten a_{ij} durch

$$\mathcal{R}(X \wedge Y) = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j.$$

Dann ist

$$a_{ij} = \langle \mathcal{R}(X \wedge Y), e_i \wedge e_j \rangle = \langle R_{XY} e_i, e_j \rangle.$$

Es folgt

$$\sum_j a_{ij} e_j = \sum_j \langle R_{XY} e_i, e_j \rangle e_j = R_{XY} e_i$$

und

$$\mathcal{R}(X \wedge Y) = \frac{1}{2} \sum_i e_i \wedge \left(\sum_j a_{ij} e_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i e_i \wedge R_{XY} e_i.$$

□

Der Levi-Civita Zusammenhang auf TM definiert einen Zusammenhang auf allen Formenbündeln $\Lambda^p T^* M$. Durch die Standardformel können wir dadurch eine Krümmung R^{Λ^p} auf diesen Bündeln definieren.

Lemma 5.17 *Für die Krümmung auf den Formenbündeln gilt:*

1. $(R^{\Lambda^1}_{XY} \lambda) Z = -\lambda(R_{XY} Z)$, $\lambda \in \Omega^1(M)$.
2. *Allgemeiner:* $R^{\Lambda^p}_{XY} \omega = \mathcal{R}(X \wedge Y)_* \omega$, $\omega \in \Omega^p(M)$.

Beweis: Wir beweisen die zweite Aussage mit der ersten. Zu 1: Für den Zusammenhang auf $\Lambda^1 T^* M$ gilt:

$$(\nabla_X \lambda)(Z) = X(\lambda(Z)) - \lambda(\nabla_X Z).$$

Damit folgt für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}(\nabla_X \nabla_Y \lambda)(Z) &= X((\nabla_Y \lambda)(Z)) - (\nabla_Y \lambda)(\nabla_X Z) \\ &= X(Y(\lambda(Z))) - X(\lambda(\nabla_Y Z)) - Y(\lambda(\nabla_X Z)) + \lambda(\nabla_Y \nabla_X Z).\end{aligned}$$

Für die Krümmung folgt

$$(R^{\Lambda^1}_{XY} \lambda)(Z) = -\lambda(R_{XY} Z).$$

Zu 2: Der Zusammenhang auf dem Bündel der 2-Formen ist definiert durch

$$\nabla_X (\lambda \wedge \mu) = (\nabla_X \lambda) \wedge \mu + \lambda \wedge (\nabla_X \mu).$$

Es folgt

$$\nabla_X \nabla_Y (\lambda \wedge \mu) = (\nabla_X \nabla_Y \lambda) \wedge \mu + \lambda \wedge (\nabla_X \nabla_Y \mu) + (\nabla_Y \lambda) \wedge (\nabla_X \mu) + (\nabla_X \lambda) \wedge (\nabla_Y \mu).$$

Damit folgt für die Krümmung:

$$R^{\Lambda^2}_{XY} (\lambda \wedge \mu) = (R^{\Lambda^1}_{XY} \lambda) \wedge \mu + \lambda \wedge (R^{\Lambda^1}_{XY} \mu).$$

Allgemein ist R^{Λ^p} eine Fortsetzung von R^{Λ^1} als Derivation. Da sich $\mathcal{R}(X \wedge Y)_* \omega$ als Derivation auf $\Lambda^p T^* M$ fortsetzt, ist für das Lemma nur zu zeigen, dass

$$R^{\Lambda^1}_{XY} \lambda = \mathcal{R}(X \wedge Y)_* \lambda$$

für eine 1-Form λ. Wir rechnen beide Seiten aus. Wir haben in 1. gesehen, dass

$$(R^{\Lambda^1}_{XY} \lambda)(Z) = -\lambda(R_{XY} Z).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}(X \wedge Y)_* \lambda)(Z) &= \frac{1}{2} \left(\sum_i (e_i \wedge R_{XY} e_i)_* \lambda \right) (Z) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_i ((R_{XY} e_i)^\flat \wedge e_i \lrcorner - e_i^\flat \wedge (R_{XY} e_i) \lrcorner) \lambda \right] (Z) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_i ((R_{XY} e_i)^\flat \lambda(e_i) - e_i^\flat \lambda(R_{XY} e_i)) \right] (Z) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i (\langle R_{XY} e_i, Z \rangle \lambda(e_i) - \langle e_i, Z \rangle \lambda(R_{XY} e_i)) \\
&= -\lambda(R_{XY} Z).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir folgende Nebenrechnung verwendet:

$$\begin{aligned}
-\lambda(R_{XY} Z) &= -\sum_j \lambda(R_{XY} e_j) \langle Z, e_j \rangle \\
&= -\sum_{i,j} \lambda(\langle R_{XY} e_j, e_i \rangle e_i) \langle Z, e_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \lambda(e_i) \langle R_{XY} e_i, e_j \rangle \langle Z, e_j \rangle \\
&= \sum_i \langle R_{XY} e_i, Z \rangle \lambda(e_i).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Definition 5.18 *Sei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis in $T_x M$. Dann definieren wir einen Operator $q(R)$ auf $\Lambda^p T^* M$ durch*

$$q(R)\omega = \sum_{i,j} e_i^\flat \wedge \left(e_j \lrcorner R^{\Lambda^p}_{e_j e_i} \omega \right).$$

Man beachte die Reihenfolge der e_i, e_j.

Wir definieren den Ricci-Tensor auf 1-Formen λ durch

$$(\mathrm{Ric}\, \lambda)(Z) = \lambda(\mathrm{Ric}\, Z).$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Ric} \geq 0$ auf $\Lambda^1 T^* M$ genau dann, wenn $\mathrm{Ric} \geq 0$ auf TM.

Lemma 5.19 *Für den Operator $q(R)$ gilt:*

1. $q(R) = p(n-p)Id$ *auf* $\Lambda^p T^* S^n$ *für* S^n *mit der runden Metrik.*
2. $q(R) = Ric$ *auf* $\Lambda^1 T^* M$ *für alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten* (M, g).

Beweis: Die erste Aussage folgt mit der Formel oben für den Krümmungstensor von S^n und weil sich die Krümmung auf $\Lambda^p T^* M$ von $\Lambda^1 T^* M$ als Derivation fortsetzt. Wir beweisen die zweite Aussage:

$$\begin{aligned}
(q(R)(\lambda))(X) &= \sum_{i,j} (e_i^\flat \wedge (e_j \lrcorner R^{\Lambda^1}_{e_j e_i} \lambda)(Z) \\
&= \sum_{i,j} \langle e_i, Z \rangle (R^{\Lambda^1}_{e_j e_i} \lambda)(e_j) \\
&= -\sum_{i,j} e^j(X) \lambda(R_{e_i e_j} e_i) \\
&= -\sum_j \lambda(R_{e_j Z} e_j) \\
&= \lambda(\sum_j R_{Z e_j} e_j) \\
&= \lambda(\mathrm{Ric}\,(Z)) \\
&= (\mathrm{Ric}\,\lambda)(Z).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 5.20 *Es gilt*

$$\begin{aligned}
q(R) &= \sum_{i<j} (e_i \wedge e_j)_* \circ \mathcal{R}(e_i \wedge e_j)_* \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i \wedge e_j)_* \circ \mathcal{R}(e_i \wedge e_j)_*.
\end{aligned}$$

Beweis: Die zweite Zeile folgt wegen Schiefsymmetrie. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}
q(R)\omega &= -\sum_{i,j} e_i^\flat \wedge e_j \lrcorner \mathcal{R}(e_i \wedge e_j)_* \omega \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i^\flat \wedge e_j \lrcorner \mathcal{R}(e_i \wedge e_j)_* \omega + e_j^\flat \wedge e_i \lrcorner \mathcal{R}(e_j \wedge e_i)_* \omega) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i^\flat \wedge e_j \lrcorner - e_j^\flat \wedge e_i \lrcorner) \mathcal{R}(e_i \wedge e_j)_* \omega \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i \wedge e_j)_* \circ \mathcal{R}(e_i \wedge e_j)_* \omega.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Der Operator $q(R)$ ist ein Bündelendomorphismus von $\Lambda^p M$ und unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis von $\Lambda^2 TM$. Es gilt

$$q(R) = \sum_i (\omega_i)_* \circ \mathcal{R}(\omega_i)_*$$

für alle Orthonormalbasen $\{\omega_i\}$ von $\Lambda^2 TM$. Zum Beispiel kann man eine diagonalisierende Basis wählen, so dass $\mathcal{R}(\omega_i) = \lambda_i \omega_i$. Dann gilt

$$q(R) = \sum_i \lambda_i (\omega_i)_* \circ (\omega_i)_*.$$

5.4 Die klassische Weitzenböckformel

Satz 5.21 *Es gilt*

$$\Delta = \nabla^*\nabla + q(R) \quad \textit{auf } \Omega^p(M).$$

Beweis: Wir verwenden eine lokale Orthonormalbasis $\{e_i\}$ um p, so dass $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$. Es gilt

$$(\nabla^*\nabla\omega)(p) = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega$$

und

$$\nabla_X (A \wedge B) = (\nabla_X A) \wedge B + A \wedge (\nabla_X B).$$

Im Punkt p gilt:

$$\begin{aligned}
d^* d\omega &= -\sum_{i,j} e_j \lrcorner \nabla_{e_j}(e_i^\flat \wedge \nabla_{e_i}\omega) \\
&= -\sum_{i,j} e_j \lrcorner (e_i^\flat \wedge \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\omega) \\
&= -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \sum_{i,j} e_i^\flat \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\omega) \\
&= \nabla^*\nabla\omega + \sum_{i,j} e_i^\flat \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\omega)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
dd^*\omega &= -\sum_{i,j} e_i^\flat \wedge \nabla_{e_i}(e_j \lrcorner \nabla_{e_j}\omega) \\
&= -\sum_{i,j} e_i^\flat \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\omega) \\
&= -\sum_{i,j} e_i^\flat \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\omega) - \sum_{i,j} e_i^\flat \wedge (e_j \lrcorner R_{e_i e_j}\omega).
\end{aligned}$$

Durch Addition beider Terme folgt die Behauptung. $\square$

Mit Lemma 5.19 folgt:

Folgerung 5.22 *Auf 1-Formen gilt*

$$\Delta\lambda = \nabla^*\nabla\lambda + Ric(\lambda).$$

Satz 5.23 (Bochner) *Sei (M^n, g) eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq 0$, d.h. alle Eigenwerte von Ric sind größer gleich Null. Ist ω eine harmonische 1-Form, dann gilt $\nabla\omega = 0$ und $(Ric(\omega), \omega) = 0$.*

Beweis: Nach Annahme ist $0 = \Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + \mathrm{Ric}(\omega)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla^*\nabla\omega, \omega) + (\mathrm{Ric}(\omega), \omega) \\ &= ||\nabla\omega||^2 + (\mathrm{Ric}(\omega), \omega). \end{aligned}$$

Da beide Terme nicht-negativ sind, folgt die Behauptung.

Folgerung 5.24 *Sei (M, g) eine kompakte orientierte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq 0$ und $Ric > 0$ in einem Punkt $p \in M$ (d.h. alle Eigenwerte von Ric in p sind größer Null). Dann gilt $b_1(M) = 0$, d.h. es existieren keine harmonischen 1-Formen auf M außer 0.*

Beweis: Angenommen, $b_1(M) > 0$, dann gibt es eine nicht-triviale harmonische 1-Form ω. Nach Satz 5.23 ist ω parallel, insbesondere ungleich Null in p, und es gilt $\int_M \langle \mathrm{Ric}(\omega), \omega\rangle = 0$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Die Voraussetzung des Satzes ist z.B. erfüllt für Einstein-Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalarkrümmung. Es folgt z.B., dass der Torus T^n keine Einstein-Metrik positiver Skalarkrümmung besitzt (allgemeiner haben Gromov und Lawson 1984 gezeigt, dass T^n überhaupt keine Metrik positiver Skalarkrümmung besitzt).

Wir können Folgerung 5.24 mit dem Satz 3.42 von Bonnet-Meyers vergleichen. Dort ist die Annahme etwas stärker, nämlich dass $\mathrm{Ric} \geq (n-1)\delta$. Dafür ist auch die Schlußfolgerung, dass $\pi_1(M)$ endlich ist, wegen dem folgenden Lemma etwas stärker.

Lemma 5.25 *Ist M eine Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(M)$ endlich, dann folgt $b_1(M) = 0$.*

Beweis: Die Abbildung

$$\begin{aligned} H^1_{dR}(M) &\xrightarrow{f} \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R}) \\ [\alpha] &\longmapsto ([\gamma] \mapsto \int_\gamma \alpha) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear und injektiv. Falls die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ endlich ist, folgt aber, dass $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R}) = 0$: Sei $h \neq 0 \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$. Das Bild von h ist eine endliche Untergruppe von $\mathbb{R}$. Dann muß das Bild von h Null sein, denn mit jedem $x \neq 0 \in \mathrm{im}(h)$ gilt auch $nx \in \mathrm{im}(h)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. □

Folgerung 5.26 *Sei (M^n, g) eine kompakte orientierte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq 0$. Dann gilt $b_1(M) \leq n$. Gleichheit gilt nur, falls (M, g) flach ist.*

Beweis: Falls Ric ≥ 0 ist nach dem Satz von Bochner jede harmonische 1-Form parallel. Jede parallele Form ist trivialerweise harmonisch. Daher ist die Dimension des Raumes der harmonischen 1-Formen, d.h. die erste Betti-Zahl, gleich der Dimension der parallelen 1-Formen. Diese Dimension ist immer kleiner gleich n, da parallele 1-Formen durch ihren Wert in einem Punkt bestimmt sind. Im Gleichheitsfall gibt es eine Trivialisierung des Tangentialbündels durch parallele Vektorfelder E_i. Mit der Formel für die Krümmung folgt $R_{E_iE_j}E_k = 0$, d.h. (M, g) ist flach. □

Die folgende topologische Aussage kann man auch auf andere Weise beweisen, z.B. mit der Mayer-Vietoris-Sequenz.

Folgerung 5.27 *Auf der Sphäre S^n verschwinden alle Betti-Zahlen b_p für $p \neq 0, n$.*

Beweis: Mit der Formel für $q(R)$ für die runde Metrik folgt, dass $\Delta > 0$ für $0 < p < n$. Dann kann es in diesen Graden keine harmonischen Formen geben. □

Allgemeiner hat man:

Satz 5.28 *Ist $q(R) \geq 0$ auf $\Lambda^k T^*M$, dann sind alle harmonischen k-Formen parallel. Ist $q(R) > 0$ auf $\Lambda^k T^*M$, dann ist $b_k(M) = 0$.*

Bemerkung: Sei $\mathcal{R} \colon \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$ der Krümmungsoperator. Es gilt:

$$\mathcal{R} \leq 0 \Rightarrow K \geq 0,$$

da

$$K(X, Y) = -\frac{\langle \mathcal{R}(X \wedge Y), X \wedge Y \rangle}{||X \wedge Y||^2}.$$

Es gilt auch:

$$\mathcal{R} \leq 0 \Rightarrow q(R) \geq 0$$
$$\mathcal{R} < 0 \Rightarrow q(R) > 0.$$

Der letzte Fall ist eine starke Einschränkung an die Mannigfaltigkeit:

Satz 5.29 (Brendle, Schoen 2007) *Ist $\mathcal{R} < 0$, dann ist M diffeomorph zu S^n.*

Man hat außerdem:

Satz 5.30 (Gallot, Meyer 1975) *Sei (M^n, g) eine kompakte, irreduzible und einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathcal{R} \leq 0$. Dann ist M ein symmetrischer Raum $M = G/K$ oder homöomorph zu S^n oder biholomorph zu $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n/2}$.*

5.5 Der Krümmungsoperator von symmetrischen Räumen

Sei $M = G/K$ ein symmetrischer Raum vom kompakten Typ, z.B. $S^n, \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ oder die Grassmannsche $O(p+q)/O(p) \times O(q)$. Wir schreiben die Liealgebra von G als $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}$ ein Ad-invariantes Komplement ist. Es gilt:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k},\ [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Wir können den Tangentialraum $T_0 M$ mit $\mathfrak{p}$ identifizieren. Die Riemannsche Metrik auf M ist gegeben durch die Einschränkung der Killing-Form B auf $\mathfrak{p}$. Für die Krümmung gilt dann

$$R_{XY}Z = -\mathrm{ad}_{[X,Y]}Z = -[[X,Y],Z].$$

Die Isotropie-Darstellung ist

$$\lambda\colon K \to SO(\mathfrak{p})$$

mit Differential

$$\lambda_*\colon \mathfrak{k} \to so(\mathfrak{p}) \cong \Lambda^2\mathfrak{p},\ \lambda_*(X) = \mathrm{ad}(X),$$

wobei $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y]$. Es gilt

$$\lambda_*(X) = \mathrm{ad}(X) = \frac{1}{2}\sum_i e_i \wedge [X, e_i]$$

für jede Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von $\mathfrak{p}$. Die Abbildung λ_* ist injektiv und wir können $\mathfrak{k}$ mit seinem Bild identifizieren. Wir schreiben $\Lambda^2\mathfrak{p} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^\perp$.

Lemma 5.31 *Der Krümmungsoperator $\mathcal{R}\colon \Lambda^2\mathfrak{p} \to \Lambda^2\mathfrak{p}$ hat Bild in $\mathfrak{k}$.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X \wedge Y) &= \frac{1}{2}\sum_i e_i \wedge R_{XY}e_i \\ &= -\frac{1}{2}\sum_i e_i \wedge [[X,Y], e_i] \\ &= -\lambda_*([X,Y]).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, da $[X,Y] \in \mathfrak{k}$. □

Satz 5.32 *Auf symmetrischen Räumen vom kompakten Typ gilt $\mathcal{R} \leq 0$.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\langle \mathcal{R}(\omega), \omega\rangle \leq 0$ für alle $\omega \in \Lambda^2\mathfrak{p}$. Wir können wegen Lemma 5.31 annehmen, dass $\omega = \mathrm{ad}(X)$ mit $X \in \mathfrak{k}$. Dann ist für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von $\mathfrak{p}$

$$\omega = \sum_i e_i \wedge [X, e_i].$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}(\omega), \omega\rangle &= \sum_{i,j} \langle \mathcal{R}(e_i \wedge [X,e_i]), e_j \wedge [X, e_j]\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle R_{e_i [X,e_i]} e_j, [X, e_j]\rangle \\ &= -\sum_{i,j} \langle [[e_i, [X, e_i]], e_j], [X, e_j]\rangle \\ &= -\sum_{i,j} \langle [e_i, [X, e_i]], [e_j, [X, e_j]]\rangle \\ &= -||Z||^2\end{aligned}$$

für $Z = \sum_i [e_i, [X, e_i]]$. Im vorletzten Schritt haben wir die Ad-Invarianz des Skalarproduktes ausgenutzt. Insgesamt folgt die Behauptung. □

5.6 Der Casimir-Operator

Sei G eine kompakte, halb-einfache Liegruppe, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein G-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ und $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine unitäre Darstellung auf einem komplexen Vektorraum V. Sei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{g}$.

Definition 5.33 *Den Endomorphismus*

$$Cas_\rho^{\mathfrak{g}} = \sum_i \rho_*(e_i) \circ \rho_*(e_i)$$

von V nennt man den Casimir-Operator *von G und ρ.*

Bemerkungen:

1. $\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}}$ ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis $\{e_i\}$. (ÜA).
2. Es gilt $\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Zentrum}(\mathrm{End}_G V)$, d.h.

$$\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}} \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}}, \quad \forall g \in G. \text{ (ÜA)}$$

3. Sei (V_λ, ρ) eine irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht $\lambda \in t^* = \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}} = -\langle \lambda, \lambda + 2\delta\rangle \mathrm{Id}.$$

   Dabei ist δ ein spezielles Element in t.

Beispiel: Sei $G = SO(2n+1)$. Dann ist $t^* = \mathbb{R}^n$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf t^* ist das Standardskalarprodukt. Es gilt

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ mit } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Das Element δ ist gegeben durch

$$\delta = \frac{1}{2}(2n-1, 2n-3, \ldots, 1).$$

Für $V_\lambda = \Lambda^k \mathbb{C}^{2n+1}$ ist

$$\lambda = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \quad (k \text{ Einsen}).$$

Daraus folgt

$$\langle \lambda, \lambda + 2\delta\rangle = k(2n+1-k).$$

Zum Beispiel ist für $k = 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cas}_{\Lambda^1}^{so(2n+1)} &= \sum_{i<j} (e_i \wedge e_j)_* \circ (e_i \wedge e_j)_* \\ &= -2n. \end{aligned}$$

Für den Raum $V_\lambda = \mathrm{Sym}_0^k \mathbb{C}^{2n+1}$ der harmonischen homogenen Polynome vom Grad k auf $\mathbb{C}^{2n+1}$ ist

$$\lambda = (k, 0, \ldots, 0)$$

und

$$\langle \lambda, \lambda + 2\delta \rangle = k(k + 2n - 1).$$

Die Darstellung auf den homogenen Polynomen $\mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^{2n+1}$ ist nicht irreduzibel, sondern zerfällt in eine Summe

$$\mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^{2n+1} = \bigoplus_i \mathrm{Sym}_0^{k-2i} \mathbb{C}^{2n+1},$$

ähnlich wie in Lemma 4.5. Zum Beispiel gilt $\mathrm{Sym}^2 \mathbb{C}^{2n+1} = \mathrm{Sym}_0^2 \mathbb{C}^{2n+1} \oplus \mathbb{C}$, wobei $\mathrm{Sym}_0^2 \mathbb{C}^{2n+1}$ die spurfreien homogenen Polynome, betrachtet als symmetrische Endomorphismen, sind.

5.7 Das Laplace-Spektrum auf symmetrischen Räumen

Wir betrachten wieder einen kompakten symmetrischen Raum $M = G/K$ und schreiben wie in Abschnitt 5.5 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Die Isotropie-Darstellung ist $\lambda_* \colon \mathfrak{k} \to so(\mathfrak{p})$. Der Krümmungsoperator ist $\mathcal{R} \colon \Lambda^2 \mathfrak{p} \to \Lambda^2 \mathfrak{p}$.

Lemma 5.34 *Sei $\rho_* \colon \mathfrak{k} \to End(\Lambda^k \mathfrak{p}^*)$ die Darstellung von $\mathfrak{k}$ auf $\Lambda^k \mathfrak{p}^*$, gegeben durch die Verknüpfung der Isotropie-Darstellung mit der Standarddarstellung von $so(\mathfrak{p})$ auf den Formen wie in Abschnitt 5.3. Dann gilt für jede Orthonormalbasis $\{f_a\}$ von $\mathfrak{k}$ für den Operator $q(R)$ auf k-Formen die Formel*

$$\begin{aligned} q(R) &= -\sum_a \rho_*(f_a) \circ \rho_*(f_a) \\ &= -Cas_\rho^{\mathfrak{k}}. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{p}$. Da $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, können wir schreiben

$$[e_i, e_j] = \sum_a \langle [e_i, e_j], f_a \rangle f_a.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} q(R) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i \wedge e_j)_* \circ \mathcal{R}(e_i \wedge e_j)_* \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i \wedge e_j)_* \circ (\lambda_*([e_i, e_j]))_* \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j,a} \langle f_a, [e_i, e_j] \rangle (e_i \wedge e_j)_* \circ (\lambda_*(f_a))_* \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j,a} \langle [f_a, e_i], e_j \rangle (e_i \wedge e_j)_* \circ (\lambda_*(f_a))_* \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,a} (e_i \wedge [f_a, e_i])_* \circ (\lambda_*(f_a))_* \\ &= -\sum_a (\lambda_*(f_a))_* \circ (\lambda_*(f_a))_* \\ &= -\sum_a \rho_*(f_a) \circ \rho_*(f_a). \end{aligned}$$

□

Sei $M = G/K$ der symmetrische Raum und $E \to M$ ein Vektorbündel mit faserweiser Darstellung

$$\rho\colon K \xrightarrow{\lambda} SO(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Aut}(V),$$

z.B. mit $E = \Lambda^p T^* M$ und

$$\rho\colon K \xrightarrow{\lambda} SO(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Aut}(\Lambda^p \mathfrak{g}^*).$$

Es gibt die Identifikation

$$\Gamma(E) \cong C^\infty(G,V)^K = \{f\colon G \to V \text{ glatt} \mid f(gk) = k^{-1} f(g)\}, \tag{5.12}$$

wobei $k^{-1}f(g)$ eine Abkürzung für $\rho(k)^{-1}f(g)$ ist. Zum Beispiel ist $C^\infty(M)$ der Raum der glatten K-invarianten Funktionen auf G.

Bemerkung: Der Raum $\Gamma(E)$ trägt die sogenannte *links-reguläre* G-Darstellung

$$(g \cdot f)(x) = l_g(f)(x) = f(g^{-1}x).$$

Lemma 5.35 *Unter der Identifikation (5.12) für $E = \Lambda^p T^* M$ geht der Levi-Civita Zusammenhang ∇_X in die Richtungsableitung $L_X = X(\,)$ über.*

Es gilt

$$\nabla_x \hat{f} = X(f) = -l_*(X)f.$$

Damit folgt für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von $\mathfrak{p}$

$$\begin{aligned}
\nabla^*\nabla \hat{f} &= -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} f \\
&= -\sum_i l_*(e_i) l_*(e_i) f \\
&= -(\mathrm{Cas}_l^{\mathfrak{g}} - \mathrm{Cas}_l^{\mathfrak{k}}) f.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.34 folgt:

Satz 5.36 *Für einen kompakten symmetrischen Raum $M = G/K$ gilt*

$$\Delta = \nabla^*\nabla + q(R) = -Cas_l^{\mathfrak{g}}.$$

Da G durch Isometrien auf M wirkt, kann man $\Omega^p(M)$ in G-invariante Unterräume zerlegen, die von Δ erhalten werden. Es folgt:

Satz 5.37 *Als G-Darstellung gibt es folgende Zerlegung in irreduzible isotypische Summanden:*

$$\Omega^p(M) \cong \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} W_\lambda \otimes Hom_K(W_\lambda, \Lambda^p \mathfrak{p}^*),$$

mit $\Delta|_{W_\lambda} = \langle \lambda, \lambda + 2\delta \rangle Id.$

Beispiel: Sei $M = S^{2n} = SO(2n+1)/SO(2n)$. Die irreduziblen $SO(2n+1)$-Darstellungen sind gegeben durch

$$V_\lambda,\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Die irreduziblen $SO(2n)$-Darstellungen sind gegeben durch

$$V_{\bar\lambda},\ \bar\lambda = (\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_n),\ \bar\lambda_1 \geq \bar\lambda_2 \geq \dots \geq \bar\lambda_{n-1} \geq |\bar\lambda_n|,\ \bar\lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Wir betrachten eine Zerlegung $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}$. Diese Zerlegung ist $SO(2n)$-invariant, wenn man $SO(2n)$ in $SO(2n+1)$ durch

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in SO(2n),$$

einbettet. Deshalb zerfällt die Darstellung V_λ in gewisse $V_{\bar\lambda}$.

Satz 5.38 *Als $SO(2n)$-Darstellung gilt $V_\lambda = \bigoplus_{\bar\lambda} V_{\bar\lambda}$ mit*

$$\lambda_1 \geq \bar\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq |\bar\lambda_n| \quad \lambda_i, \bar\lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel: Für $C^\infty(S^{2n})$ ist $\bar\lambda = 0$. Daraus folgt $\lambda_2, \dots, \lambda_n = 0$ und

$$\lambda = (k, 0, \dots, 0).$$

Es gilt

$$V_{(k,0,\dots,0)} = \mathrm{Sym}_0^k(\mathbb{R}^{2n+1})$$

und

$$-\mathrm{Cas}^{so(2n+1)}_{V_{(k,0,\dots,0)}} = k(k+2n-1)\mathrm{Id}.$$

Daraus folgt, dass

$$C^\infty(S^{2n}) = \bigoplus_k V_{(k,0,\dots,0)} \otimes \mathrm{Hom}_{so(2n)}(V_{(k,0,\dots,0)}, \mathbb{C}).$$

Dabei ist $V_{(k,0,\dots,0)}$ ein Eigenraum des Laplace-Operators auf S^{2n} und $\mathrm{Hom}_{so(2n)}(V_{(k,0,\dots,0)}) \cong \mathbb{C}^{m_k}$ mit der Multiplizität m_k; vergleiche Abschnitt 4.2. Das Spektrum ist

$$\mathrm{Spec}(\Delta) = \{k(k+2n-1) \mid k = 0, 1, \dots\}.$$

Das ist das Spektrum der Sphäre mit der Standardmetrik: Das Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^n = t^*$ ist

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = -\frac{1}{2(2n-1)} B_{so(2n+1)}.$$

Daraus folgt für die Skalarkrümmung

$$\mathrm{scal}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = 2(2n-1)\mathrm{scal}_{-B} = 2n(2n-1),$$

da $\mathrm{scal}_{-B} = \frac{\dim M}{2}$ für einen symmetrischen Raum M.

5.8 Weitzenböck-Formeln II und der Twistor-Operator

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis. Später ist $V = T_xM$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle = g_x$ für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g).

Lemma 5.39 *Die Darstellung $\Lambda^k V^* \otimes V^*$ zerfällt in die unter $SO(n)$ irreduziblen Summanden $\Lambda^{k+1}V^* \oplus \Lambda^{k-1}V^* \oplus \Lambda^{k,1}V^*$.*

Wir beschreiben die Summanden und ihre Einbettung in $\Lambda^k V^* \otimes V^*$ im Folgenden genauer. Seien

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\Lambda^{k+1}}\colon V^* \otimes \Lambda^k V^* &\longrightarrow \Lambda^{k+1}V^* \\ \lambda \otimes \omega &\longmapsto \lambda \wedge \omega \\ \mathrm{i}_{\Lambda^{k+1}}\colon \Lambda^{k+1}V^* &\longrightarrow V^* \otimes \Lambda^k V^* \\ \alpha &\longmapsto \frac{1}{k+1}\sum_k e_i^\flat \otimes (e_i \lrcorner \alpha). \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathrm{pr}_{\Lambda^{k+1}} \circ \mathrm{i}_{\Lambda^{k+1}} = \mathrm{Id}_{\Lambda^{k+1}}$ und $\mathrm{i}_{\Lambda^{k+1}} \circ \mathrm{pr}_{\Lambda^{k+1}}$ ist eine Projektion auf das Bild von $\mathrm{i}_{\Lambda^{k+1}}$. Seien

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\Lambda^{k-1}}\colon V^* \otimes \Lambda^k V^* &\longrightarrow \Lambda^{k-1}V^* \\ X^\flat \otimes \omega &\longmapsto X \lrcorner \omega \\ \mathrm{i}_{\Lambda^{k-1}}\colon \Lambda^{k-1}V^* &\longrightarrow V^* \otimes \Lambda^k V^* \\ \alpha &\longmapsto \frac{1}{n-k+1}\sum_k e_i^\flat \otimes (e_i^\flat \wedge \alpha). \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathrm{pr}_{\Lambda^{k-1}} \circ \mathrm{i}_{\Lambda^{k-1}} = \mathrm{Id}_{\Lambda^{k-1}}$ und $\mathrm{i}_{\Lambda^{k-1}} \circ \mathrm{pr}_{\Lambda^{k-1}}$ ist eine Projektion auf das Bild von $\mathrm{i}_{\Lambda^{k-1}}$. Seien schließlich

$$\Lambda^{k,1}V^* = \ker \mathrm{pr}_{\Lambda^{k-1}} \cap \ker \mathrm{pr}_{\Lambda^{k+1}} \subset V^* \otimes \Lambda^k V^*$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\Lambda^{k,1}}\colon V^* \otimes \Lambda^k V^* &\longrightarrow \Lambda^{k,1}V^* \\ \lambda \otimes \omega &\longmapsto \lambda \otimes \omega - \mathrm{i}_{\Lambda^{k+1}} \circ \mathrm{pr}_{\Lambda^{k+1}}(\lambda \otimes \omega) - \mathrm{i}_{\Lambda^{k-1}} \circ \mathrm{pr}_{\Lambda^{k-1}}(\lambda \otimes \omega), \end{aligned}$$

d.h.

$$(\mathrm{pr}_{\Lambda^{k,1}}(\lambda \otimes \omega))(v) = \lambda(v)\omega - \frac{1}{k+1} v \lrcorner (\lambda \wedge \omega) - \frac{1}{n-k+1} v^\flat \wedge (\lambda^\sharp \lrcorner \omega).$$

Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann zerfällt $T^*M \otimes \Lambda^k T^*M$ in die Bündel

$$T^*M \otimes \Lambda^k T^*M \cong \Lambda^{k+1}T^*M \oplus \Lambda^{k-1}T^*M \oplus \Lambda^{k,1}T^*M.$$

Für eine k-Form ω ist $\nabla\omega$ ein Schnitt in dem Bündel auf der linken Seite.

Lemma 5.40 *Es gilt für jede k-Form ω:*

1. $d\omega = pr_{\Lambda^{k+1}}(\nabla\omega)$.
2. $d^*\omega = -pr_{\Lambda^{k-1}}(\nabla\omega)$.

Beweis: Zu 1: Es ist $\nabla\omega = \sum_i e_i^\flat \otimes \nabla_{e_i}\omega$. Damit folgt

$$\mathrm{pr}_{\Lambda^{k+1}}(\nabla\omega) = \sum_i e_i^\flat \wedge \nabla_{e_i}\omega = d\omega.$$

Analog folgt die Behauptung für $d^*\omega$. □

Definition 5.41 *Der* Twistor-Operator

$$P\colon \Gamma(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$$

ist definiert durch $P\omega = pr_{\Lambda^{k,1}}(\nabla\omega)$. Es gilt:

$$(P\omega)(X) = \nabla_X\omega - \frac{1}{k+1} X \lrcorner d\omega + \frac{1}{n-k+1} X^\flat \wedge d^*\omega.$$

Lemma 5.42 *Sei Z ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit M.*

1. *$PZ^\flat = 0 \Leftrightarrow Z$ ist ein konformes Vektorfeld, d.h. $L_Z g = fg$ für eine Funktion f.*
2. *$PZ^\flat = 0$ und $d^*Z^\flat = 0 \Leftrightarrow Z$ ist ein Killing-Vektorfeld, d.h. $L_Z g = 0$.*

Beweis: Sei $\lambda = Z^\flat$. Dann gilt $P\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$0 = (\nabla_X\lambda)Y - \frac{1}{2} d\lambda(X,Y) + \frac{1}{n} g(X,Y) d^*\lambda, \quad \forall \text{ Vektorfelder } X, Y.$$

Es gilt

$$d\lambda(X,Y) = L_X(\lambda(Y)) - L_Y(\lambda(X)) - \lambda([X,Y]) = (\nabla_X\lambda)Y - (\nabla_Y\lambda)X.$$

Damit folgt

$$P\lambda = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}((\nabla_X\lambda)Y + (\nabla_Y\lambda)X) + \frac{1}{n} g(X,Y) d^*\lambda, \quad \forall X, Y.$$

Eine kurze Nebenrechnung zeigt

$$(\nabla_X\lambda)Y + (\nabla_Y\lambda)X = (L_Z g)(X,Y).$$

Es folgt:

$$PZ^\flat = 0 \Leftrightarrow L_Z g = -\frac{2}{n}(d^*Z^\flat) g.$$

Eine weitere Nebenrechnung zeigt, dass aus $L_Z g = fg$ für die Funktion f folgt $f = -\frac{2}{n} d^*Z^\flat$. Damit folgt insgesamt die Behauptung. □

Satz 5.43 (Weitzenböck-Formel) *Auf $\Omega^k(M)$ gilt:*

1. $\nabla^*\nabla = \frac{1}{k+1}d^*d + \frac{1}{n-k+1}dd^* + P^*P$.
2. $q(R) = \frac{k}{k+1}d^*d + \frac{n-k}{n-k+1}dd^* - P^*P$.

Zum Beweis siehe die Übungsaufgaben. Man verwendet, dass der adjungierte Operator

$$P^*\colon \Gamma(\Lambda^{k,1}T^*M) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^k T^*M)$$

gegeben ist durch

$$P^*\psi = -\sum_i \nabla_{e_i}(\psi(e_i)) + \sum_i \psi(\nabla_{e_i}e_i),$$

wobei $\psi \in \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$ von der Form $\psi = \sum_i e_i^\flat \otimes \psi(e_i)$ ist.

Mit Lemma 5.19 folgt:

Folgerung 5.44 *Für eine 1-Form $\lambda \in \Omega^1(M)$ gilt*

$$Ric(\lambda) = \frac{1}{2}d^*d\lambda + \frac{n-1}{n}dd^*\lambda - P^*P\lambda.$$

Folgerung 5.45 (Lichnerowicz) *Sei (M^n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq c \cdot g$ für eine Konstante $c > 0$ (d.h. alle Eigenwerte von Ric sind $\geq c$). Dann gilt für den ersten von Null verschiedenen Eigenwert λ_1 des Laplace-Operators Δ auf Funktionen:*

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}c.$$

Beweis: Sei $\Delta f = \lambda f$ mit $\lambda \neq 0$, so dass df nicht identisch Null ist. Dann folgt

$$\mathrm{Ric}(df) = \frac{1}{2}d^*d(df) + \frac{n-1}{n}dd^*(df) - P^*P(df).$$

Wegen $d^2 = 0$ ist

$$\frac{n-1}{n}\Delta(df) = \mathrm{Ric}(df) + P^*P(df).$$

Durch Bilden des L^2-Produkts mit df folgt

$$\frac{n-1}{n}\lambda||df||^2 = c||df||^2 + ||P(df)||^2 \geq c||df||^2.$$

Da df nicht identisch Null ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkung: Der Satz von Obata, der in einem der nächsten Abschnitt bewiesen wird, besagt dass Gleichheit im Satz von Lichnerowicz genau dann gilt, wenn (M, g) isometrisch zu (S^n, g_0) ist.

Folgerung 5.46 *Sei X ein Killing-Vektorfeld auf (M^n, g). Dann gilt:*

1. $d^*X^\flat = 0$.

2. $\Delta X^\flat = 2Ric(X^\flat)$.

Ist M zusätzlich kompakt, dann gilt die Umkehrung, d.h. X ist ein Killing-Vektorfeld, genau dann, wenn 1 und 2 erfüllt sind.

Beweis: X ist nach Lemma 5.42 ein Killing-Vektorfeld, genau dann, wenn $PX^\flat = 0$ und $d^*X^\flat = 0$. Nach Folgerung 5.44 ist dann

$$\mathrm{Ric}(X^\flat) = \frac{1}{2}d^*dX^\flat = \frac{1}{2}\Delta X^\flat.$$

Das zeigt die erste Richtung. Sei M kompakt und X ein Vektorfeld mit Eigenschaften 1 und 2. Dann gilt wegen Folgerung 5.44

$$P^*PX^\flat = \frac{1}{2}d^*dX^\flat - \mathrm{Ric}(X^\flat) = 0.$$

Es folgt $||PX^\flat||^2 = 0$ und damit $PX^\flat = 0$. Zusammen mit Eigenschaft 1 folgt aus Lemma 5.42, dass X ein Killing-Vektorfeld ist. □

5.9 Die Isometriegruppe Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Satz 5.47 *Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für die Isometriegruppe $I(M, g)$:*

1. *$Ric < 0 \Rightarrow I(M, g)$ ist endlich.*
2. *$Ric \geq 0 \Rightarrow$ Alle Killing-Vektorfelder sind parallel und die Zusammenhangskomponente $I_0(M, g)$ der Eins ist ein Torus.*
3. *$Ric = 0 \Rightarrow \dim I(M, g) = b_1(M)$.*

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. Man verwendet, dass die Liealgebra der Isometriegruppe durch den Raum der Killing-Vektorfelder gegeben ist.

Definition 5.48 *Für ein Vektorfeld ξ definieren wir den Operator auf Vektorfeldern $A_\xi = L_\xi - \nabla_\xi$. Die Rechnung*

$$\begin{aligned} A_\xi X &= L_\xi X - \nabla_\xi X \\ &= [\xi, X] - \nabla_\xi X \\ &= \nabla_\xi X - \nabla_X \xi - \nabla_\xi X \\ &= -\nabla_X \xi \end{aligned}$$

zeigt, dass $A_\xi = -\nabla\xi$ ein Endomorphismus auf TM ist.

Bemerkung: ξ ist ein Killing-Vektorfeld, genau dann, wenn A_ξ schiefsymmetrisch ist.

Lemma 5.49 *Für beliebige Vektorfelder Y, Z und ein Killing-Vektorfeld ξ gilt*

$$L_\xi(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_\xi Z) = \nabla_{[\xi,Y]}Z.$$

Beweis: Sei ϕ_t der lokale Fluß von ξ durch Isometrien. Dann gilt

$$\phi_{t*}(\nabla_Y Z) = \nabla_{\phi_{t*}Y}\phi_{t*}Z.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} L_\xi(\nabla_Y Z) &= \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}(\nabla_Y Z - \phi_{t*}\nabla_Y Z) \\ &= \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}(\nabla_Y Z - \nabla_{\phi_{t*}Y} Z) + \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}(\nabla_{\phi_{t*}Y} Z - \nabla_{\phi_{t*}Y}\phi_{t*}Z) \\ &= \nabla_{L_\xi Y} Z + \nabla_Y L_\xi Z \\ &= \nabla_{[\xi,Y]} Z + \nabla_Y L_\xi Z. \end{aligned}$$

□

Satz 5.50 *Sei ξ ein Killing-Vektorfeld. Dann gilt:*

1. $\nabla_Y A_\xi = R_{\xi Y}$.
2. $\nabla^2_{Y,Z}\xi = -R_{\xi Y} Z$.

Beweis: Die zweite Aussage ist ein Folge der ersten mit $\nabla^2_{Y,Z}\xi = \nabla_Y\nabla_Z\xi - \nabla_{\nabla_Y Z}\xi$. Wir beweisen die ersten Aussage. Mit der Definition von A_ξ und Lemma 5.49 folgt:

$$\begin{aligned} (\nabla_Y A_\xi)(Z) &= \nabla_Y(A_\xi Z) - A_\xi \nabla_Y Z \\ &= \nabla_Y L_\xi Z - \nabla_Y\nabla_\xi Z - L_\xi\nabla_Y Z + \nabla_\xi\nabla_Y Z \\ &= -\nabla_{[\xi,Y]} Z - \nabla_Y\nabla_\xi Z + \nabla_\xi\nabla_Y Z \\ &= R_{\xi Y} Z. \end{aligned}$$

Folgerung 5.51 *Killing-Vektorfelder entlang Geodätischen sind Jacobi-Vektorfelder (klar, da Fluß durch Isometrien).*

Folgerung 5.52 *Falls (M^n, g) kompakt ist, gilt für die Isometriegruppe*

$$dim\, I(M,g) \le \frac{1}{2}n(n+1) = dim\, SO(n+1) = dim\, I(S^n, g_0).$$

Beweis: Sei E das Vektorbündel $E = TM \oplus \Lambda^2 T^*M$. Wir definieren eine kovariante Ableitung $\hat\nabla$ auf E durch

$$\hat\nabla_X \begin{pmatrix} Y \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_X & X\lrcorner \\ R_{X\cdot} & \nabla_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_X Y + A(X) \\ R_{XY} + \nabla_X A \end{pmatrix}.$$

Sei ξ ein Killing-Vektorfeld. Dann gilt

$$\hat\nabla_X \begin{pmatrix} \xi \\ A_\xi \end{pmatrix} = 0.$$

Die Abbildung

$$\xi \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ A_\xi \end{pmatrix}$$

ist eine injektive lineare Abbildung von dem Raum der Killing-Vektorfelder in den Raum der $\hat\nabla$-parallelen Schnitt von E. Dieser Raum hat Dimension kleiner gleich dem Rang von E, der gegeben ist durch $n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1) = \dim SO(n+1)$. Da die Killing-Vektorfelder die Liealgebra der Isometriegruppe bilden, folgt die Behauptung.
□

5.10 Die Cheeger-Ungleichung

Sei (M^n, g) eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 5.53 *Die* Cheeger-Konstante *ist definiert als*

$$h = \inf \frac{vol(S)}{\min\{vol(M_+), vol(M_-)\}},$$

wobei das Infimum über alle Untermannigfaltigkeiten S der Kodimension 1 läuft, die M in zwei Teile M_+ und M_- mit gemeinsamen Rand S aufteilen.

Satz 5.54 (Cheeger-Ungleichung, 1970) *Sei λ_1 der erste von Null verschiedene Eigenwert der Laplace-Operators Δ auf $C^\infty(M)$. Dann gilt:*

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2}{4}.$$

Bemerkung: Die Ungleichung ist in gewissem Sinne optimal auf Flächen.

Wir beweisen nun den Satz von Cheeger.

Beweis: **Erster Schritt:** Sei f_1 eine Eigenfunktion von Δ zum Eigenwert λ_1, d.h. $\Delta f_1 = \lambda_1 f_1$.

- (Milnor): Falls nötig ersetzt man f_1 durch eine Morsefunktion f_2, d.h. eine Funktion ohne entartete kritische Punkte, beliebig nahe an f_1.
- Falls nötig ersetzt man f_2 durch $f_2 + \epsilon$, mit ϵ beliebig klein, so dass 0 ein regulärer Wert ist. Das ist möglich, da die kritischen Punkte von f_2 isoliert sind.

Man erhält so eine Funktion f, die nur nicht-entartete isolierte kritische Punkte hat, so dass 0 ein regulärer Wert ist. Man kann erreichen, dass $\frac{||df||^2}{||f||^2}$ beliebig nahe an λ_1 liegt.
Zweiter Schritt: Wir zerlegen M: Sei $S = f^{-1}(0)$. Da 0 ein regulärer Wert ist, ist S eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1. Seien

$$M_+ = f^{-1}([0, \infty))$$
$$M_- = f^{-1}((-\infty, 0]).$$

OBdA (man kann f durch $-f$ ersetzen) sei $\mathrm{vol}(M_-) \geq \mathrm{vol}(M_+)$.

Bemerkung: Es genügt $\frac{||df||^2_{M_+}}{||f||^2_{M_+}}$ nach unten abzuschätzen.

Es gilt mit dem Volumenelement $v_g = \mathrm{dvol}_g$ (alle folgenden Integrale sind nur über M_+):

$$\begin{aligned}
\frac{||df||^2_{M_+}}{||f||^2_{M_+}} &= \frac{\int |df|^2 v_g}{\int f^2 v_g} \\
&= \frac{\int f^2 v_g \cdot \int |df|^2 v_g}{(\int f^2 v_g)^2} \\
&\geq \frac{(\int f|df| v_g)^2}{(\int f^2 v_g)^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(\int |df^2| v_g}{\int f^2 v_g}\right)^2.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendet und dass $|df^2| = 2|f| \cdot |df| = 2f|df|$, da $f \geq 0$ auf M_+. **Zu zeigen ist:**

$$\int_{M_+} |df|^2 v_g \geq h \int_{M_+} f^2 v_g. \tag{5.13}$$

Dritter Schritt: Seien $p_1, \ldots, p_r$ die (isolierten) kritischen Punkte von f auf M_+ mit Werten $a_i = f(p_i)$ und

$$\begin{aligned}
I'_k &= (a_{k-1}, a_k) \\
M_k &= f^{-1}(I'_k),
\end{aligned}$$

für $k \geq 1$. Wir setzen dabei $a_0 = 0$. Nach der Morsetheorie ist M_k diffeomorph zu $I'_k \times L_k$, wobei $L_k = f^{-1}(\beta)$ für ein beliebiges $\beta \in I'_k$. Da wir an der Funktion f^2 interessiert sind, machen wir eine Variablentransformation: Sei

$$I_k = (a^2_{k-1}, a^2_k)$$

und $p\colon M_k \to I_k \times L_k$ ein Diffeomorphismus mit inverser Abbildung α, so dass $\pi_1 \circ p = f^2$, d.h.

$$\pi_1 = f^2 \circ \alpha,$$

wobei $\pi_1\colon I_k \times L_k \to I_k$ die Projektion ist. In jedem Punkt von M_k gilt

$$v_g|_{M_k} = dr \wedge \omega,$$

wobei $dr = \frac{df}{|df|}$ und ω die Volumenform der Niveaufläche von f durch den betrachteten Punkt von M_k ist.

Lemma 5.55 *Mit dem Diffeomorphismus $\alpha\colon I_k \times L_k \to M_k$ gilt*

$$\alpha^* dr = \frac{\pi_1^* dt}{|df^2|}.$$

Beweis: Es ist $(f^2)^*dt = df^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\pi_1^* dt &= (f^2 \circ \alpha)^* dt = \alpha^*(f^2)^* dt \\ &= \alpha^*(df^2) = 2f\alpha^* df.\end{aligned}$$

Da $|df^2| = 2f|df|$ folgt

$$\frac{\pi_1^* dt}{|df^2|} = \alpha^* \left(\frac{df}{|df|} \right) = \alpha^* dr.$$

□

Wir definieren $J_k = \int_{M_k} |df^2| v_g$. Dann gilt nach der Transformationsformel und dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}J_k &= \int_{I_k \times L_k} \alpha^*(|df^2| v_g) \\ &= \int_{I_k \times L_k} |df^2| \alpha^* dr \wedge \alpha^* \omega \\ &= \int_{I_k \times L_k} \pi_1^* dt \wedge \alpha^* \omega \\ &= \int_{I_k} \left(\int_{t \times L_k} \alpha^* \omega \right) dt.\end{aligned}$$

Sei

$$A(t) = \mathrm{vol}(f^{-1}(\sqrt{t})) = \int_{\alpha(t \times L_k)} \omega.$$

Dann gilt

$$J_k = \int_{I_k} A(t) dt.$$

Vierter Schritt: Seien

$$\begin{aligned}S(t) &= f^{-1}(\sqrt{t}) \\ M_+(t) &= f^{-1}([\sqrt{t}, \infty)) \\ M_-(t) &= f^{-1}((-\infty, \sqrt{t}]).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$V(t) = \mathrm{vol}(M_+(t)).$$

Es gilt

$$V(t) \leq \mathrm{vol}(M_-(t)),$$

denn

$$V(t) \leq \mathrm{vol}(M_+) \leq \mathrm{vol}(M_-) \leq \mathrm{vol}(M_-(t)).$$

Es folgt mit der Definition der Cheeger-Konstanten für $t \in I_k$

$$h \leq \frac{\mathrm{vol}(S(t))}{\min\{\mathrm{vol}(M_+(t)), \mathrm{vol}(M_-(t))} \leq \frac{A(t)}{V(t)}.$$

Mit

$$J'_k = \int_{I_k} V(t)dt$$

folgt

$$J_k \geq hJ'_k.$$

Durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} J'_k &= \int_{I_k} V(t)dt \\ &= tV(t)|_{\partial I_k} - \int_{I_k} t\frac{d}{dt}V(t)dt. \end{aligned}$$

Es folgt

$$J' = \sum_{k=0}^{r} J'_k = -\sum_{k=0}^{r} \int_{I_k} t\frac{d}{dt}V(t)dt,$$

da sich die mittleren Randterme in der Summe paarweise wegheben und am unteren Ende $t = 0$ und am oberen $V(t) = 0$ ist. Es folgt

$$\int_{M_+} |df^2|v_g = J = \sum_{k=0}^{r} J_k \geq h\left(-\sum_{k=0}^{r}\int_{I_k} t\frac{d}{dt}V(t)dt\right). \tag{5.14}$$

Fünfter Schritt: Es gilt mit Fubini

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{(t,a_k)\times L_k} \alpha^* dr \wedge \alpha^*\omega + \sum_{i=1}^{r-k}\int_{I_{k+i}\times L_{k+1}} \alpha^* dr \wedge \alpha^*\omega \\ &= \int_{(t,a_k)} \left(\int_{L_k} \alpha^*\omega\right)\frac{ds}{|df^2|} + \sum_{i=1}^{r-k}\int_{I_{k+i}}\left(\int_{L_{k+1}} \alpha^*\omega\right)\frac{ds}{|df^2|}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\int_{L_k} \frac{\alpha^*\omega}{|df^2|}.$$

Mit Gleichung (5.14) folgt

$$\begin{aligned} \int_{M_+} |df^2|v_g = J &\geq h\left(\sum_{k=0}^{r}\int_{I_k}\left(\int_{L_k}\frac{t\alpha^*\omega}{|df^2|}\right)dt\right) \\ &= h\sum_{k=0}^{r}\int_{I_k\times L_k} t\alpha^* dr\wedge\alpha^*\omega \\ &= h\sum_{k=0}^{r}\int_{I_k\times L_k} tv_g \\ &= h\sum_{k=0}^{r}\int_{M_k} f^2 v_g \\ &= h\int_{M_+} f^2 v_g. \end{aligned}$$

Damit ist Ungleichung (5.13) bewiesen. □