Weitzenböck - Formeln

(M^n, g) or. Riemannsche Mfk.

Rahmenbündel: $P_G \xrightarrow{\pi} M$ — G-HFB, $G = SO(n)$, allgemeiner: $G = Hol(\bar\nabla)$

assoziierte Vektorbündel

$\varrho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, V$ — G-Darstellung

$VM := P_G \times_\varrho V$ — $(p, v) \sim (p \cdot g, \varrho(g)^{-1} v)$

$\Gamma(VM) = C^\infty(P_G, V)^G$

$f \mapsto \hat f$

zB $TM = P_G \times_\lambda T$, $T = \mathbb{R}^n$, $\lambda = id$

Bündelmorphismen: $\psi : V \longrightarrow \tilde V$ G-äquivariant

$\Rightarrow \psi : VM \longrightarrow \tilde V M$ Bündelmorphismus

$[p, v] \mapsto [p, \psi(v)]$

faserweise Wirkung: $* : \Lambda^2 TM \times VM \longrightarrow VM$

$*(X \wedge Y) v := \varrho_*(X \wedge Y) v$ — $\Lambda^2 T \cong so(T)$

induzierte Zuss: Jede metrische Zus. $\bar\nabla$ auf TM induziert einen Zus. ∇ auf VM

$\bar\nabla \rightsquigarrow$ Zus. auf P_G : $\omega \in \Omega^1(P_G, g)$ mit
- $R_g^* \omega = Ad(g^{-1})\omega$
- $\omega(\tilde X) = X$

$p = (e_1, \dots, e_n)$ lokale ONB über $U \subset M$

$\Rightarrow p^* \omega = (\omega_{ij})$ — $\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes e_j$

$\Rightarrow \widehat{\nabla_X f} = \tilde X(\hat f) + \varrho_*(\omega(\tilde X)) \hat f$ — $\pi_* \tilde X = X$, $X \in \mathfrak{X}(P_G)$

Krümmung: $\widehat{R^\nabla_{X,Y} f} = \varrho_*(\Omega(\tilde X, \tilde Y)) \hat f$, $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ Krümmungsform in $\Omega^2(P_G, g)$

$R^\nabla_{X,Y} f = R^{\bar\nabla}_{X,Y} * f = R^{\bar\nabla}(X \wedge Y) * f$

Beispiel:
- $V = \mathrm{End}\, T$, $L \in \mathrm{End}\, T$

$R^\nabla_{X,Y} L = R^{\bar\nabla}_{X,Y} * L = [R^{\bar\nabla}_{X,Y}, L]$

- $V = \Lambda^2 T$, $\omega = A \wedge B \in \Lambda^2 T$

$R^\nabla_{X,Y} A \wedge B = R^{\bar\nabla}_{X,Y} * (A \wedge B) = (R^{\bar\nabla}_{X,Y} A) \wedge B + A \wedge (R^{\bar\nabla}_{X,Y} B)$

Verallgemeinerte Gradienten

$TM = P_G \times_\lambda T$, $VM = P_G \times_\rho V$

$\bar{\nabla}$ ∇

Sei $\sigma : T \otimes V \to \tilde{V}$ eine G-äquivariante Abbildung
$X \otimes v \mapsto X \cdot v$

⇝ Bündelmorph.

→ σ definiert einen natürlichen Differentialoperator 1. Ordnung auf Schnitten von VM

$$D_\sigma : \Gamma(VM) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes VM) \cong \Gamma(TM \otimes VM) \longrightarrow \Gamma(\tilde{V}M)$$

$$D_\sigma = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i} \qquad \{e_i\} \text{ lokale ONB}$$

Beispiele: ① Differential

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$
$$d = \sum_i e_i \wedge \nabla_{e_i}$$
$$\sigma : T \otimes \Lambda^k T \to \Lambda^{k+1} T \qquad \text{Dachprodukt}$$

② Dirac-Operator

$$D : \Gamma(SM) \to \Gamma(SM)$$
$$D = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i}$$
$\sigma, \cdot$: Clifford-Multiplikation

Kanonische Zerlegung: $T \otimes V = \bigoplus_\varepsilon V_\varepsilon$ Zerlegung als G-Darstellung in irreduzible Summanden

→ G-äquivariante Abbildungen: $\sigma = pr_\varepsilon : T \otimes V \to V_\varepsilon$

→ $D_\varepsilon = pr_\varepsilon \circ \nabla$

verallgemeinerte Gradienten

wichtig: $G = SO_n$ oder aus der Berger-Liste, dann: V_ε sind paarweise nicht-isomorph

Bemerkung:
- pr_ε sind hier orthogonale Projektionen, $V_\varepsilon \subset T \otimes V$
- $Id_{T \otimes V} = \sum pr_\varepsilon$
- $\nabla = \sum D_\varepsilon$

Operatoren 2. Ordnung auf $\Gamma(VM)$

- rough Laplacian : $\nabla^* \nabla = -\operatorname{Tr}(\nabla^2)$
$$= -\sum_i \left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} \right)$$

- $D_\varepsilon^* \, D_\varepsilon$

allgemeine Konstruktion : $\cdot \quad \varphi \in \Gamma(VM) \qquad (T^*M \cong TM)$

$$\rightarrow \nabla^2 \varphi \in \Gamma(TM \otimes TM \otimes VM)$$

$\cdot \quad F \in \operatorname{Hom}_G(T \otimes T \otimes V, V) \cong \operatorname{End}_G(T \otimes V)$

$$\rightarrow D_F \varphi = F(\nabla^2 \varphi)$$

Differential-Operator 2. Ordnung

Lemma: ① $F = \mathrm{Id}_{T \otimes V}$: $D_F = -\nabla^* \nabla$

② $F = pr_\varepsilon$: $D_F = -\, D_\varepsilon^* D_\varepsilon$

Beweis: $\operatorname{Hom}_G(T \otimes T \otimes V, V) \cong \operatorname{End}_G(T \otimes V) \cong \operatorname{Hom}_G(T \otimes T, \operatorname{End} V)$

$$F(a \otimes b \otimes v) = F_{a \otimes b} v = a \lrcorner F(b \otimes v)$$

$$\rightarrow \mathrm{Id}_{a \otimes b}(v) = g(a,b) v$$

$$pr_\varepsilon(a \otimes b \otimes v) = a \lrcorner pr_\varepsilon(b \otimes v)$$

zu ①: $\rightarrow \mathrm{Id} \circ \nabla^2 = \sum_i g(e_i, e_j) \nabla^2_{e_i, e_j} = -\nabla^* \nabla$

zu ②: $D_\varepsilon^* = \nabla^* \circ pr_\varepsilon^* \longrightarrow D_\varepsilon^* D_\varepsilon = -tr \circ (id \otimes pr_\varepsilon^* pr_\varepsilon) \circ \nabla^2$

pr_ε : orthogonale Projektion: $\quad pr_\varepsilon^* pr_\varepsilon = pr_\varepsilon^2 = pr_\varepsilon$

$$\rightarrow D_\varepsilon^* D_\varepsilon = -tr\,(id \otimes pr_\varepsilon)\, \nabla^2$$

$$pr_\varepsilon \circ \nabla^2 = \sum pr_\varepsilon(e_i \otimes e_j \otimes \nabla^2_{e_i, e_j})$$
$$= \sum e_i \lrcorner \, pr_\varepsilon(e_j \otimes \nabla^2_{e_i, e_j})$$
$$= tr\,(id \otimes pr_\varepsilon)\, \nabla^2$$

Folgerung: $\nabla^* \nabla = \sum_i D_\varepsilon^* D_\varepsilon$

Beweis: $\mathrm{Id} = \sum_i \mathrm{pr}_\varepsilon$

Weitzenböck-Formeln

Definition: Weitzenböck-Formel (WBF)

$\sum_i b_\varepsilon D_\varepsilon^* D_\varepsilon \in \mathrm{End}(VM)$

d.h. ein Term 0.ter Ordnung, linear in der Krümmung

Sei $F \in \mathrm{End}_G(T \otimes V)$ $\qquad T \otimes V = \bigoplus V_\varepsilon$

$\Rightarrow F = \sum_i b_\varepsilon \, \mathrm{pr}_\varepsilon$ $\qquad F|_{V_\varepsilon} = b_\varepsilon \, \mathrm{Id}$ $\qquad$ ER-Zerlegung

$\rightarrow D_F = -\sum_i b_\varepsilon D_\varepsilon^* D_\varepsilon$

Lemma: Ein äquivariante Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_G(T \otimes V)$ definiert genau dann eine WBF wenn $F_{a \otimes b} = -F_{b \otimes a}$.

Beweis: • $F \circ \nabla^2 = \sum_i F(e_i \otimes e_j) \nabla_{e_i} \nabla_{e_j}$ $\qquad ((\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0)$

$= \frac{1}{2} \sum_i F(e_i \otimes e_j)(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i})$

$= \frac{1}{2} \sum_i F(e_i \otimes e_j) \, R_{e_i e_j}$

d.h. F schief-symm. $\rightarrow D_F$ definiert WBF

• umgekehrt: Hauptsymbol von $D_F = F \circ \nabla^2$

$\sigma_{D_F}(\xi) v = F_{\xi \otimes \xi} v \qquad \forall v \in VM, \ \xi \in T^*$

d.h. D_F ist 0.ter Ordnung genau dann, wenn F schief-symmetrisch ist

Definition: Der konforme Gewichtsoperator $B \in \mathrm{Hom}_G(T \otimes T, \mathrm{End}\, V)$ ist definiert durch:

$$B_{X \otimes Y}\, v = (X \wedge Y) * v$$
$$= \sum b_\varepsilon \, pr_\varepsilon$$

b_ε explizit in höchsten Gewichten berechenbar

Bemerkung: B ist schief-symmetrisch und definiert damit eine (universelle) WBF

Lemma: $D_B = q(R)$

Beweis:

$$B(\nabla^2 \varphi) = \sum B_{e_i \otimes e_j} \nabla^2_{e_i, e_j} \varphi$$
$$= \sum (e_i \wedge e_j) * \nabla^2_{e_i, e_j} \varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum (e_i \wedge e_j) * R_{e_i, e_j} \varphi$$
$$= q(R)\, \varphi$$

Folgerung (universelle Weitzenböck-Formel)

$$q(R) = -\sum b_\varepsilon P_\varepsilon^* P_\varepsilon$$

Bemerkung: $\mathrm{Cas}^{g}_{\varrho} := \sum \varrho_*(X_i) \circ \varrho_*(X_i)$ $\qquad \varrho : G \to \mathrm{Aut}\, V$

$\mathrm{Cas}^{g}_{\varrho} = c_\varrho \cdot \mathrm{Id}$ falls (V, π) eine irreduzible Darstellung ist

$$\Rightarrow b_\varepsilon = \tfrac{1}{2} \left(c_T^{\Lambda^2} + c_V^{\Lambda^2} - c_{V_\varepsilon}^{\Lambda^2} \right)$$

wobei: $T \otimes V = \bigoplus V_\varepsilon$

Skalarprodukt auf $g \subset \Lambda^2 T$ ist induziert vom Standardskalarprodukt auf $\Lambda^2 T$

Bemerkung: $\Delta = \sum (1 - b_\varepsilon) D_\varepsilon^* D_\varepsilon$

Bemerkung: Casimir - Eigenwerte

$$\pi = \Lambda^k T : \qquad C_\pi^{\Lambda^2} = - k(n-k)$$

$$\pi = \mathrm{Sym}_0^\ell T : \qquad C_\pi^{\Lambda^2} = - \ell(\ell + n - 2)$$

Beispiele:

$$\begin{array}{ccccccc} T \otimes \Lambda^k T & = & \Lambda^{k,1} T & \oplus & \Lambda^{k-1} T & \oplus & \Lambda^{k+1} T \\ b_\varepsilon & & 1 & & -n+k & & -k \\ & & \varepsilon_1 & & \varepsilon_2 & & \varepsilon_3 \end{array}$$

zB
$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \tfrac{1}{2} \left(C_T^{\Lambda^2} + C_{\Lambda^k}^{\Lambda^2} - C_{\Lambda^{k-1}}^{\Lambda^2} \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \left(-n+1 - k \cdot n + k^2 + (k-1)(n-k+1) \right) \\ &= \text{[illegible]} \\ &= \tfrac{1}{2} \left(\cancel{-n+1} \cancel{-kn} \cancel{+k^2} + \cancel{kn} \cancel{-k^2} + k - n + k \cancel{-1} \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \left(-2n + 2k \right) = -n + k \end{aligned}$$

$\mathrm{pr}_{\varepsilon_2} = i_{\Lambda^{k-1}}$
$\mathrm{pr}_{\varepsilon_3} = i_{\Lambda^{k+1}}$

Bemerkung: $D_{\varepsilon_2}^* D_{\varepsilon_2} = \frac{1}{n-k+1} d d^*$, $\quad D_{\varepsilon_3}^* D_{\varepsilon_3} = \frac{1}{k+1} d^* d$

$$\Rightarrow \quad q(R) = - D_{\varepsilon_1}^* D_{\varepsilon_1} + (n-k) D_{\varepsilon_2}^* D_{\varepsilon_2} + k \, D_{\varepsilon_3}^* D_{\varepsilon_3}$$

$$= - D_{\varepsilon_1}^* D_{\varepsilon_1} + \frac{n-k}{n-k+1} d d^* + \frac{k}{k+1} d^* d$$