Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 11

1. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang k mit einem Zusammenhang ∇ über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, dass der Vektorraum der parallelen Schnitte in E höchstens Dimension k hat.

2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $\omega \in \Omega^k(M)$ genau dann eine Killing-Form ist (d.h. ω ist eine ko-geschlossene Form im Kern des Twistor-Operators), wenn $\nabla\omega$ eine eine Differentialform vom Grad $k+1$ ist.

3. Sei (M^n, g), $n \geq 2$ eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric} \leq 0$. Beweisen Sie, dass jedes konforme Vektorfeld schon ein Killing-Vektorfeld ist.

4. Sei $(S^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die n-dimensionale Sphäre mit der Standard-Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ferner sei $\omega \in \Omega^k(S^n)$ und $d^*\omega = 0$. Man beweise
$$\langle\Delta\omega, \omega\rangle \geq (k+1)(n-k)|\omega|^2$$
und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn ω eine Killing-Form ist.

5. Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine konforme Killing-Form.
   (a) Sei $\lambda \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\omega} = e^{(k+1)\lambda}\omega$ eine konforme Killing-Form bezüglich der Metrik $\hat{g} := e^{2\lambda}g$.
   (b) Man beweise: Es existiert eine Funktion λ, sodass $\hat{\omega} = e^{(k+1)\lambda} \cdot \omega$ parallel bezüglich $\hat{g} := e^{2\lambda}g$ ist, genau dann wenn
   $$d\omega = -(k+1)\, d\lambda \wedge \omega \quad \text{und} \quad d^*\omega = (n-k+1)\,\mathrm{grad}\,\lambda \lrcorner\, \omega$$
   gilt.