Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 10

1. Sei G eine kompakte Liesche Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe.
   (a) Beweisen Sie, dass eine $\mathrm{Ad}(H)$-invariante Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ existiert.
   (b) Sei $M = G/H$ und $p = [eH] \in M$. Man zeige, dass die Zuordnung
   $$\mathfrak{m} \to T_pM, \quad X \mapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX).p$$
   ein Isomorphimus von Vektorräumen definiert.
   (c) Betrachten Sie die Isotropiedarstellung $\rho\colon H \to \mathrm{GL}(T_pM)$, $\rho(h) = dh\colon T_pM \to T_pM$. Beweisen Sie, dass unter dem Isomorphimus aus (b) die Isotropiedarstellung gegeben ist durch die Einschränkung der adjungierten Darstellung von H auf $\mathfrak{m}$.

2. Sei G eine kompakte Liegruppe. Die Bilinearform
   $$B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)\right))$$
   heißt die *Killing-Form* von G. Man beweise, dass B negativ-semidefinit ist. Ferner beweise man, dass B nicht-ausgeartet ist, falls G einfach ist.

3. Sei G eine kompakte, halbeinfache Liegruppe, $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine unitäre Darstellung auf einem komplexen Vektorraum V. Sei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{g}$ bezüglich einem G-invarianten Skalarprodukt.
   (a) Zeigen Sie, dass der Casimir-Operator
   $$\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}} = \sum_i \rho_*(e_i) \circ \rho_*(e_i)$$
   unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis ist.
   (b) Zeigen Sie, das $\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}}$ ein G-äquivarianter Endomorphismus ist.
   (c) Sei nun G einfach und ρ_* die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$. Man beweise, dass Casimir-Operator bezüglich dem Skalarprodukt induziert durch das Negative der Killing-Form gegeben ist durch
   $$\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}} = -\mathrm{Id}.$$