Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 9

1. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ mit Winkelkoordinaten (θ, φ) und
$$\Phi\colon T^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \varphi) \mapsto ((2 + \cos\theta)\cos\varphi, (2 + \cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta).$$
   (a) Zeigen Sie, dass Φ eine Einbettung ist.
   (b) Beweisen Sie, dass die von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik auf T^2 gegeben ist durch
$$g = d\theta \otimes d\theta + (2 + \cos\theta)^2 d\varphi \otimes d\varphi.$$
   (c) Ist T^2 mit dieser Metrik isometrisch zu einem Torus der Form $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma)$ für ein Gitter Γ?

2. Seien $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $S^1 \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis. Sei G die von dem Diffeomorphismus $\gamma(x, z) = (x + 1, e^{i\theta}z)$ auf $\mathbb{R} \times S^1$ erzeugte Gruppe. Zeigen Sie, dass für die Standardproduktmetrik auf $\mathbb{R} \times S^1$ die Gruppe G eine Gruppe von Isometrien und $T = (\mathbb{R} \times S^1)/G$ ein flacher Torus ist. Berechnen Sie das Gitter Γ, sodass der Torus T isometrisch zu $\mathbb{R}^2/\Gamma$ ist.

3. Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Man beweise, dass aus der Zerlegung
$$\Omega^p(M) = \Delta(\Omega^p(M)) \oplus \mathcal{H}^p$$
die Zerlegungen
$$\begin{aligned}\Omega^p(M) &= dd^*(\Omega^p(M)) \oplus d^*d(\Omega^p(M)) \oplus \mathcal{H}^p \\ &= d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus d^*(\Omega^{p+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^p.\end{aligned}$$
folgen.

4. Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, ω eine harmonische p-Form und $[\omega] \in H^p_{\mathrm{dR}}(M)$. Man beweise, dass ω die L^2-Norm innerhalb der Kohomologieklasse $[\omega]$ minimiert.