Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Panagiotis Konstantis
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2019

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 7

1. Wir nehmen an $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $C\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ eine glatte Abbildung und schreibe $C_\alpha\colon [a,b]\to M$ für die Kurve $C(\alpha,\cdot)$. Definiere $T(\alpha,t) := dC_{(\alpha,t)}(\frac{\partial}{\partial t})$ und $V(\alpha,t) := dC_{(\alpha,t)}(\frac{\partial}{\partial\alpha})$. Dann sind $T(\alpha,\cdot)$ und $V(\alpha,\cdot)$ Vektorfelder entlang den Kurven C_α.

   (a) Zeigen Sie $\nabla_t V = \nabla_\alpha T$.

   (b) Sei Z ein beliebiges Vektorfeld entlang C_α. Beweisen Sie
   $$\nabla_\alpha\nabla_t Z - \nabla_t\nabla_\alpha Z = R(V,T)Z$$
   wobei R der Riemannsche Krümmungstensor eingeschränkt auf C_α ist.

2. Sei $\gamma\colon [0,a]\to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätischen auf einer glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Betrachten Sie
   $$L(\gamma) = \int_0^a |\dot\gamma(t)|\,dt.$$
   Betrachten Sie eine Variation $C\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ von γ, d.h. $C_0=\gamma$ mit festen Anfangs -und Endpunkt. Man beweise
   $$\frac{d^2}{d\alpha^2}L(C_\alpha)|_{\alpha=0} = \int_a^b \big(|\nabla_t V|^2 - \langle T,\nabla_t V\rangle^2 + R(V,T,T,V)\big)\,dt.$$

3. Sei $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma\colon[0,a]\to M$ eine Geodätische, sowie J ein Jakobi-Feld entlang γ mit $J(0)=0$.

   (a) Man zeige, dass $J(t) = \frac{\partial}{\partial\alpha}|_{(0,t)}\exp_{\gamma(0)}\big(\frac{t}{a}\beta(\alpha)\big)$, wobei $\beta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to T_{\gamma(0)}M$ eine glatte Kurve mit $\beta(0)=\dot\gamma(0)$ und $\frac{d}{d\alpha}\beta(0)=\nabla_t J(0)$ ist. *Hinweis: Eindeutigkeit der Jakobi-Felder.*

   (b) Es gilt
   $$\langle J(t),\dot\gamma(t)\rangle = \langle\nabla_t J(0),\gamma(0)\rangle\cdot t$$
   für $t\in[0,a]$. Folglich ist J senkrecht zu $\dot\gamma$, falls $\nabla_t J(0)$ senkrecht zu $\dot\gamma(0)$ ist.

   (c) Wir ergänzen $b_1 := \dot\gamma(0)$ zu einer Basis $(b_1,b_2,\dots,b_n)\in T_{\gamma(0)}M$ so dass $\langle b_1,b_i\rangle = 0$ für $i=2,\dots,n$. Setze $\partial_i := d(\exp_{\gamma(0)})(b_i)$ lokal um $\gamma(0)$ (lokal so, dass exp ein Diffeomorphismus ist). Seien J_i die Jacobi-Felder entlang γ mit $J_i(0)=0$ und $\nabla_t J_i(0)=b_i$ für $i\geq 2$ und $J_1 := \dot\gamma$. Man beweise
   $$\det\left(\langle J_i,J_j\rangle\right)_{ij} = t^{2(n-1)}\det\left(\langle\partial_i,\partial_j\rangle\right).$$